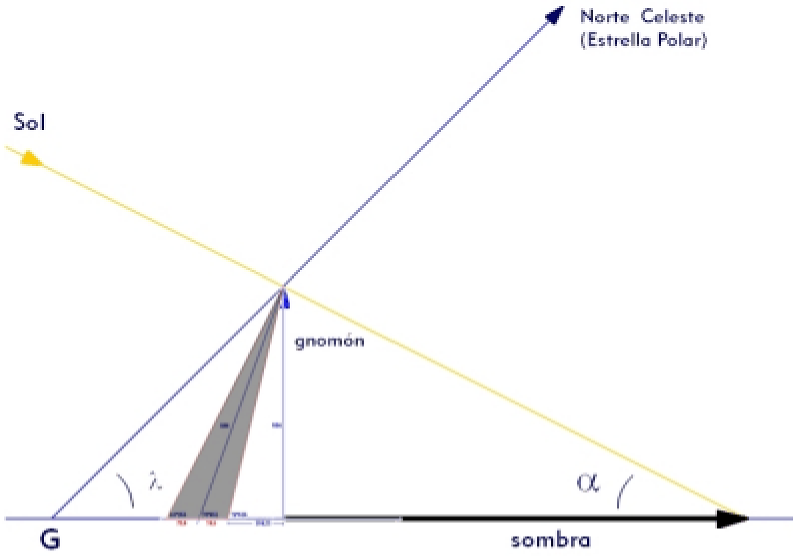
CUADERNO TÉCNICO

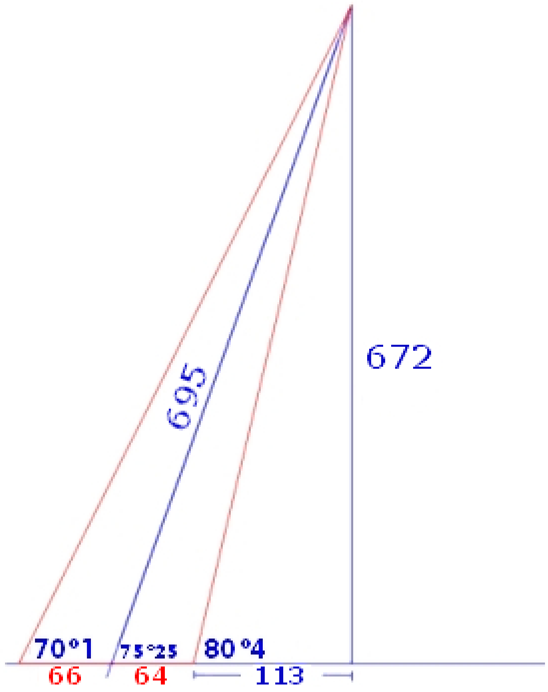
Presentación · Cómo determinar la hora con el Reloj de Sol · (X-Cerrar Ventana)

Detalle de parámetros, medidas, ecuaciones y algoritmos para la determinación de cálculos en el diseño y desarrollo del Reloj de Sol. Estimación de errores.

1.-Dimensiones y planimetría de la construcción.-

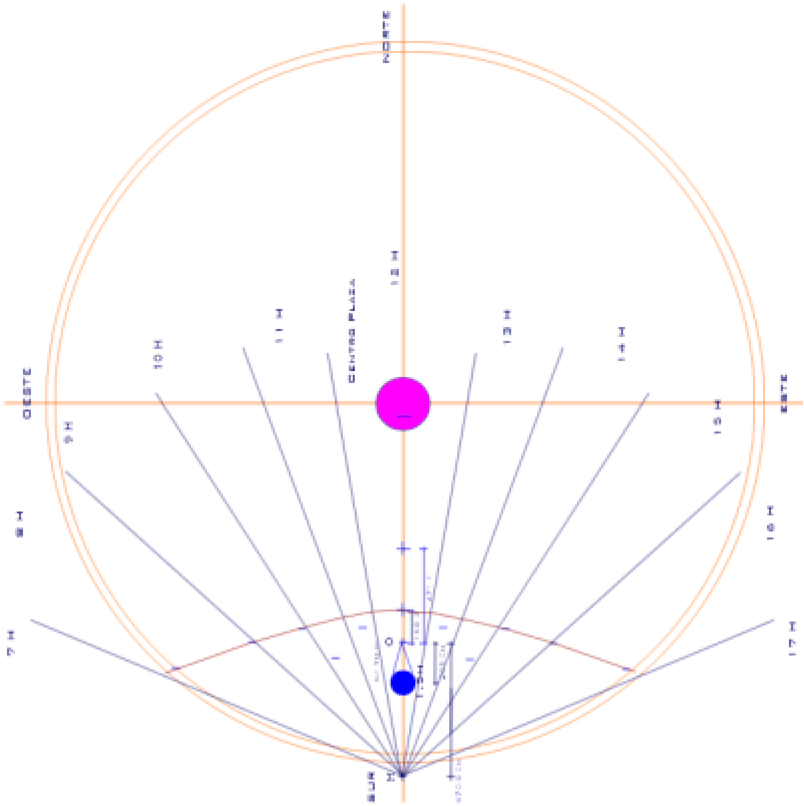
Cono (gnomon)


Norte Celeste
(Estrella Polar)
Sol
gnomón
λ
α
G
sombra


695
672
70°1
75°25
80°4
66
64
113

1.- Dimensiones y planimetría de la construcción.-

b) Plaza (reloj)



1.- Dimensiones y planimetría de la construcción.-

c) Construcción

22-26.04.2004




2.- Coordenadas del emplazamiento.-

Latitud Norte	40º 3' 25"2
Longitud Oeste	2º 7' 12"
Altitud (sobre el nivel del mar)	968 m.
Corrección de tiempo por *longitud*	8 min 29 seg
Corrección de tiempo por Zona Horaria:	
H. Invierno	60 minutos
H. Verano	120 minutos
Número medio anual de horas de sol ..	2.572*

* Valor promediado entre los años 1971 y 2000. Fuente: Instituto Nacional de Meteorología.

Instituto Nacional de Meteorología - España

El Tiempo

Valores Climatológicos Normales

CUENCA												
Periodo: 1971-2000			Altitud (m): 956			Latitud: 40 04 00			Longitud: 2 08 17			
MES	T	TM	Tm	R	H	DR	DN	DT	DF	DH	DD	I
ENE	4.3	9.4	-0.7	45	75	7	3	0	2	19	10	142
FEB	5.6	11.1	0.2	41	70	6	2	0	1	14	6	140
MAR	8.0	14.2	1.7	32	62	6	2	0	0	9	7	187
ABR	9.8	15.7	3.9	56	62	8	1	1	0	3	5	190
MAY	13.8	20.1	7.6	60	60	8	0	3	0	0	4	251
JUN	18.8	25.9	11.7	44	53	5	0	5	0	0	9	299
JUL	22.7	30.7	14.7	15	45	2	0	3	0	0	17	337
AGO	22.6	30.3	14.8	17	48	3	0	3	0	0	16	320
SEP	18.4	25.5	11.3	37	57	5	0	3	0	0	11	230
OCT	12.7	18.6	6.8	63	69	8	0	1	1	1	8	170
NOV	7.9	13.1	2.7	49	74	7	1	0	2	8	9	151
DIC	5.3	10.0	0.7	58	78	8	1	0	2	15	9	119
AÑO	12.6	18.8	6.3	507	63	73	9	19	9	68	-	2572

LEYENDA	
T	Temperatura media mensual/anual (°C)
TM	Media mensual/anual de las temperaturas máximas diarias (°C)
Tm	Media mensual/anual de las temperaturas mínimas diarias (°C)
R	Precipitación mensual/anual media (mm)
H	Humedad relativa media (%)
DR	Número medio mensual/anual de días de precipitación superior o igual a 1 mm
DN	Número medio mensual/anual de días de nieve
DT	Número medio mensual/anual de días de tormenta
DF	Número medio mensual/anual de días de niebla
DH	Número medio mensual/anual de días de helada
DD	Número medio mensual/anual de días despejados
I	Número medio mensual/anual de horas de sol

De los datos presentados puede extrapolarse una tabla más significativa:

Número medio diario de horas de Sol por meses	
Enero	4,58
Febrero	5,00
Marzo	6,03
Abril	6,33
Mayo	8,97
Junio	9,96
Julio	10,87
Agosto	10,32
Septiembre	7,67
Octubre	5,48
Noviembre	5,03
Diciembre	3,84
Media diaria anual	7,05

3.- Cálculo de la declinación solar.-

La determinación de la declinación (δ) del Sol puede hacerse mediante la relación:

$\sin\delta = \sin(ob) \cdot \sin\Lambda$ donde (ob) = 'oblicuidad de la eclíptica' = $\delta_{máx} \cong 23^{o}\,27'$

y Λ = longitud del Sol (coordenada eclíptica)

que responde a un simple cambio del sistema de referencia, (de coordenadas eclípticas a ecuatoriales). [Véase al respecto el tratamiento del cálculo del ángulo **Î** en el apartado **8.-** de este cuaderno, cuya geometría es similar].

El problema aquí es que las *condiciones de contorno* no son tan simples como en 8.- La *longitud solar* 'Λ' a su vez responde a:

$\Lambda = \Lambda m + C = \varpi + M + C$

donde: Λm = longitud media = ϖ (longitud del perihelio) + M (Anomalía Media)
y C = Ecuación del Centro
[corrección debida a la órbita elíptica y no circular]
= 2 e sin M + (5/4) e^2 sin (2M)
[e=excentricidad de la órbita]

por su parte, tanto 'ϖ' como 'M' son magnitudes referidas a una 'fecha determinada', y esto, para los efectos prácticos del reloj de sol, implica definir un 'origen' y un 'final' del periodo válido de *funcionamiento,* todo lo dilatado que se *quiera,* pero que en estricto sentido de la coherencia obligaría a *dibujar* marcas particularizadas para cada día de los contemplados en dicho periodo en el 'reloj de sol'. Es decir, no tendría sentido calcular un valor d para un *n-simo* día de *dentro* de tres años, por ejemplo, si al final se remite ese cálculo a marcas fijadas en el reloj para el primer año. (Por no decir que también entonces habría que atender otros efectos como la variación del valor de la excentricidad de la órbita con el tiempo, la precesión y nutación del eje de rotación de La Tierra, la refracción de la atmósfera terrestre, etc., ...)

Como el nivel de precisión del Reloj de Sol, (frente a otras fuentes de imprecisión, como las debidas propiamente a su construcción), no exige llegar a este extremo, en vez de aplicar las ecuaciones anteriores, (derivadas de las *leyes de Kepler* en el estricto sentido astronómico de la mecánica celeste), hemos utilizado para fijar el valor diario de la declinación del Sol (δ) un algoritmo numérico:

$$\boxed{\begin{aligned}\delta = {} & 0.006918 - 0.399912\cos\gamma + 0.070257\sin\gamma - 0.006758\cos 2\gamma \\ & + 0.000907\sin 2\gamma - 0.002697\cos 3\gamma + 0.00148\sin 3\gamma\end{aligned}}$$

[Jean Meeus - Astronomical Algorithms (NOAA)]

$$\text{donde } \gamma = (2\pi/365)\cdot(n-1 + ((h-12)/24));\ n = \text{día del año},\ h = \text{hora del día} \quad (g)$$

El valor de 'h' utilizado para determinar la δ cada día ha sido '12', es decir, el mediodía (hora solar), por lo que la última parte de la expresión (g) se anula, quedando reducida a:

$$\gamma = (2\pi/365)\,.\,(n-1)$$

[Resultado del cálculo para δ expresado en radianes]

La *bondad* del algoritmo, comparando su funcionalidad con valores de la declinación calculados por el procedimiento expresado al comienzo de este apartado, [Efemérides Astronómicas -2002- Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando - Vol. CCXI], arroja una desviación en los casos más desfavorables del orden de 30" de arco, lo que traducido a efectos prácticos en este Reloj de Sol puede suponer un error de 1cm (en situaciones extremas, como sombra de 2165 cm ± 1cm, producida tres horas después del mediodía el 1 de enero).

Esta pequeña desviación es irrelevante frente al desplazamiento de ± ½ día que tendrá su máximo en los años bisiestos, (como se indicaba en el *detalle* 1.- de la pág. 5 de este *cuaderno*), y que se estima, para la misma situación extrema del párrafo anterior, en ± 25 cm.

4.- Ecuación del Tiempo.-

Como ya se adelantó en la pág. 4 de la presentación sobre el Reloj de Sol, el movimiento aparente del Sol no es exactamente igual todos los días del año. Por eso distinguimos entre tiempo *solar medio y tiempo solar verdadero.*

La Ecuación del Tiempo contempla dos de las causas que marcan esta distinción:

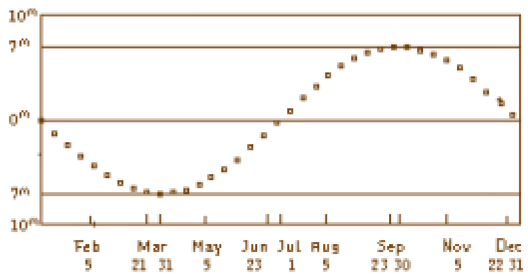
a) la excentricidad de la órbita elíptica en el movimiento de La Tierra en torno al Sol.

b) la inclinación del plano de dicha órbita respecto al plano del Ecuador terrestre, (ó lo que es lo mismo, la inclinación del eje de rotación de La Tierra respecto al plano de la eclíptica).

En ambos casos la expresión analítica de los mismos es una serie ilimitada de términos, pero pueden tomarse como suficientemente significativos los de primer ó segundo orden simplificando el problema:

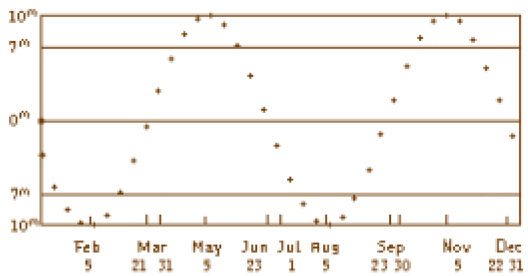
a) Ecuación del Centro.

$C = 2 e \sin M + (5/4) e^2 \sin (2M)$



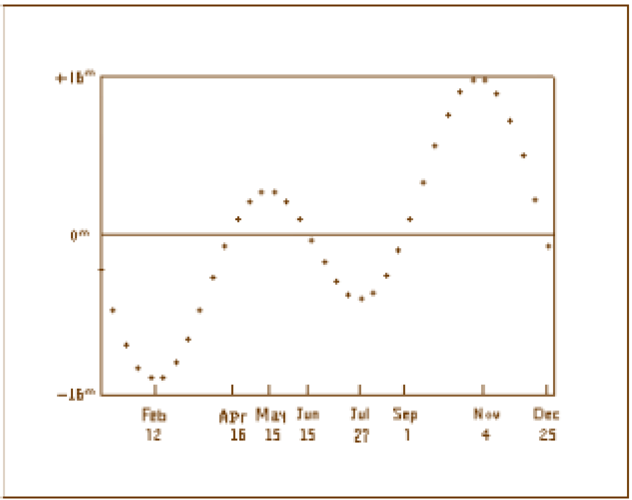
b) Reducción al Ecuador.

$R = - 0.04305 \sin (2 \lambda m)$



La suma de ambos es la Ecuación del Tiempo:

ET = C + R



Si a lo largo de un año tomásemos una sucesión de fotos del Sol, (por ejemplo, una cada diez días), con una misma película, a la misma hora del día y con la cámara apuntando a la misma posición del cielo ..., el resultado sería el que muestra la imagen. La curva característica que el Sol parece haber dibujado en el cielo se llama ANALEMA.

Es la misma figura que dibuja la sombra del Reloj de Sol.

Vasilij Rumyantsev
(Crimean Astrophysical Obsevatory)

Como en el punto anterior para el cálculo de la declinación (δ), hemos utilizado también aquí para el de la Ecuación del Tiempo un algoritmo numérico por las mismas razones expuestas anteriormente.

$$\boxed{\begin{aligned}ET = 229.18 * (&0.000075 + 0.001868 \cos y - 0.032077 \sin y \\ &- 0.014615 \cos 2y - 0.040849 \sin 2y\end{aligned}}$$

[Jean Meeus - Astronomical Algorithms (NOAA)]

donde $\gamma = (2\pi/365) \, . \, (n-1 + ((h-12)/24))$; n = día del año
h = hora del día

y, como en el caso anterior, h = 12h. Por tanto:

$$\gamma = (2\pi/365) \, . \, (n-1)$$

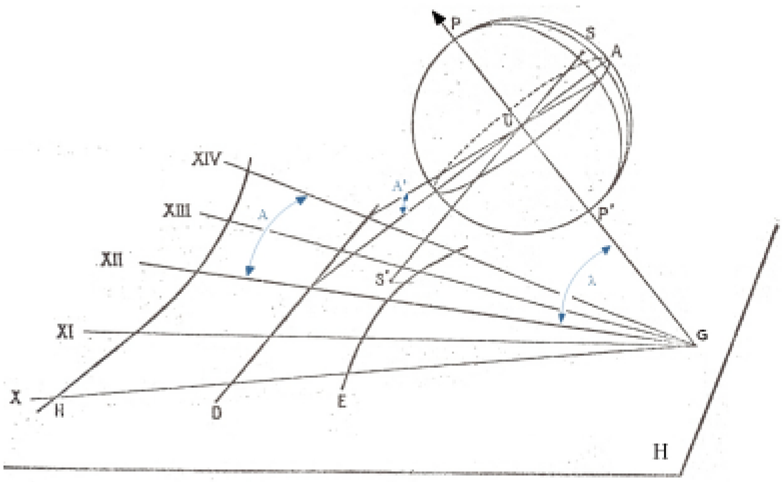
5.- Determinación de los husos horarios y vértice de los mismos.-

Una vez definidos los parámetros básicos, (latitud y longitud del emplazamiento, altura del gnomon, ...), así como las series diarias de valores para las variables fundamentales, (declinación y ecuación del tiempo), es el momento de afrontar las variables locales que determinarán la *geometría* del reloj de sol.

Como se indica al comienzo de la presentación, el mecanismo básico del reloj de sol se fundamenta en que la sombra de un mástil vertical se desplaza un ángulo bien definido por hora sobre la superficie horizontal en que se apoya, *(ángulo horario del Sol).*

Si nos situamos en el Polo Norte geográfico de La Tierra (PN), este ángulo es exactamente de 15º cada hora, (360º/24 horas). Si nuestra posición no es esa, habrá que *proyectar* el plano del horizonte polar sobre el plano del horizonte de nuestra posición. Este sencillo proceso define las líneas básicas de la geometría del reloj de sol:

[fig. 5.1]



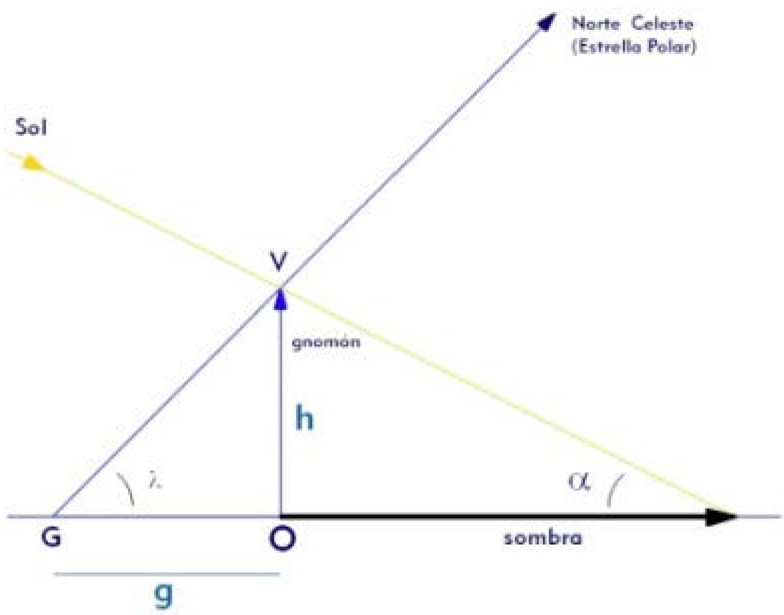
a) Sobre el plano de horizonte de *nuestro lugar* el ángulo horario (A) se transforma desde el ángulo horario (A') de la posición en PN según la expresión sencilla:

$$\operatorname{tg} A = \sin \lambda \cdot \operatorname{tg} A'$$ (λ = latitud del lugar)

Esto permite construir la tabla inicial de lo que llamaríamos *horas de tiempo solar medio* para el emplazamiento de nuestro reloj, (λ= 40º057):

Hora	A'	A
(- 5) - VII	- 75º	- 67º395
(- 4) - VIII	- 60º	- 48º104
(- 3) - IX	- 45º	- 32º763
(- 2) - X	- 30º	- 20º383
(- 1) - VII	- 15º	- 9º784
(0) - XII - mediodía	0º	0º
(+ 1) - XIII	+ 15º	+ 9º784
(+ 2) - XIV	+ 30º	+ 20º383
(+ 3) - XV	+ 45º	+ 32º763
(+ 4) - XVI	+ 60º	+ 48º104
(+ 5) - XVII	+ 75º	+ 67º395

b) El vértice (G) de los husos horarios se determina igualmente a partir del mismo modelo:

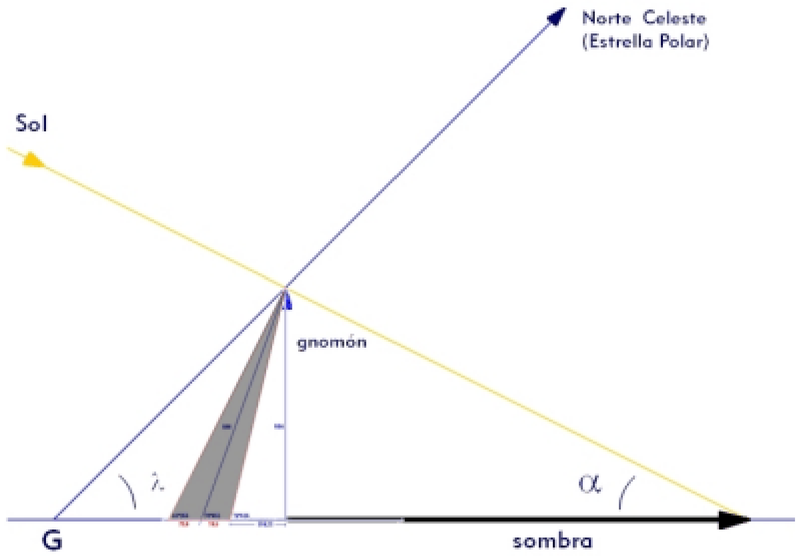


[fig. 5.2]

El punto 'G' está situado en el eje de la *meridiana* y a una distancia 'g' de la vertical del *gnomon* determinada por:

$$g = h / tg\lambda \qquad [h=564 \text{ cm}, g=670.8 \text{ cm}]$$

Generalmente el gnomon se construye como un *ángulo sólido* que ocupa de manera completa el triángulo GOV. De esta forma su sombra se adapta en todo momento a los ángulos horarios mencionados anteriormente. Sin embargo es suficiente el punto extremo de la sombra, el correspondiente al vértice del *gnomon* (V), para interpretar el reloj. En este reloj, por criterios estéticos simplemente, el 'cono' que actúa de *gnomon* no se ajusta a este modelo y no debe confundirse el extremo más agudo de su base con el punto G.



c) Los puntos 'G' y 'O' se encuentran en la meridiana, es decir en la línea donde se proyecta la sombra justamente al mediodía solar. La sombra en este momento es la más corta del día. La prolongación de esta línea por sus dos extremos debe cortar al eje de rotación terrestre justamente en los polos. Es el meridiano local.

La determinación correcta de la *meridiana* es la primera de las cuestiones a resolver de manera rigurosa al iniciar la construcción de un reloj de sol de estas características. El resto de las actuaciones en la construcción la toman como referencia:

1.- el posicionamiento del cono que sirve de gnomon, (tanto su centro como la proyección sobre el suelo de su vértice -*gnomon* propiamente dicho- deben estar sobre la *meridiana*).

2.- todas las medidas y ángulos del reloj se despliegan a partir de la misma.

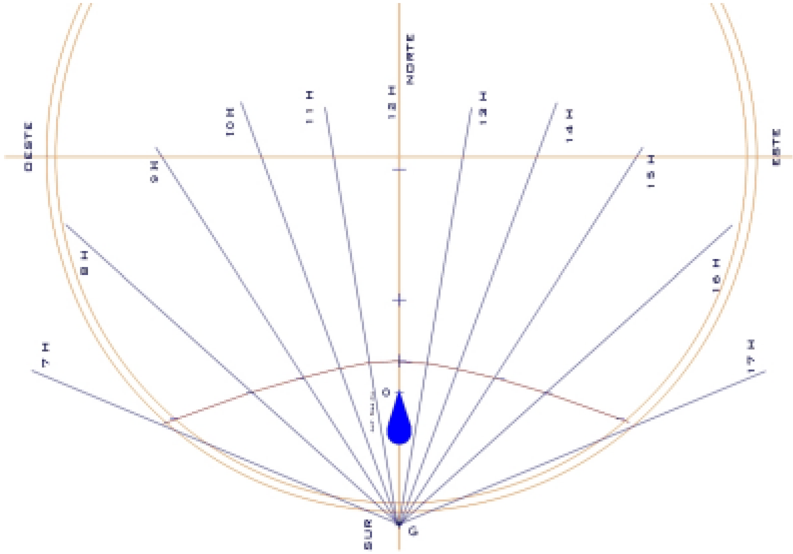
3.- la inclinación del plano del reloj, (alterando su horizontalidad y aconsejable en una obra de las dimensiones de ésta para posibilitar el desalojo de las aguas de lluvia), necesariamente debe ser controlada. En este caso hemos optado por una inclinación de 1º que bascula sobre la meridiana, quedando el punto más alto de la superficie justo al Este y el más bajo al Oeste).

Hay varios procedimientos para resolver esta exigencia de manera adecuada. El más sencillo conceptualmente sería el de utilizar el propio Sol en su recorrido de un día. A efectos constructivos no es tan fácil sin embargo. Este procedimiento exigiría partir de un terreno estrictamente nivelado en el plano horizontal.

Para el caso que nos ocupa se ha resuelto mediante topografía basada en coordenadas

UTM.

Hecho todo esto, la situación puede esquematizarse así:



Todavía queda algo por resolver. Las líneas horarias dibujadas hasta el momento corresponden a los valores enteros de las horas, (10, 11, 12, 13, 14, ...), sin embargo nuestra intención de considerar la Ecuación del Tiempo y representar sobre el Reloj las *analemas* correspondientes implica la determinación de ángulos horarios que se desplazan en algunos minutos de los ya marcados, (para cada hora y cada día del año).

RELOJ DE SOL -- VERTICAL -- (Unidades de longitud en Centímetros - Error + d = 670,8 -- alt = 564
i máx = 1° CORREC:-LONG. = - 8'29"
LATITUD = 40°057 -- LONGITUD = 2°12 (Decl.,Ecuac.tpo, ... Para las 12h00 hs)

DIA-AÑO	MES	DIA	GAMMA	DECLINACION-SOL	ECUAC.-TIEMPO (minutos)	PASO POR EL MERIDIANO (UT) hora	minutos	segundos
1	ENERO	1	0	-23.05862917	-2.90416896	12	2	54.25
2	ENERO	2	0.0172142	-22.97934167	-3.351037225	12	3	21.06
3	ENERO	3	0.0344284	-22.89242968	-3.793645475	12	3	47.62
4	ENERO	4	0.0516426	-22.79793298	-4.231581749	12	4	13.89
5	ENERO	5	0.0688568	-22.69589488	-4.664439666	12	4	39.87
6	ENERO	6	0.086071	-22.58636224	-5.09181888	12	5	5.51
7	ENERO	7	0.1032852	-22.46938537	-5.513325516	12	5	30.80
8	ENERO	8	0.1204994	-22.34501798	-5.928572605	12	5	55.71
9	ENERO	9	0.1377137	-22.21331713	-6.337180509	12	6	20.23
10	ENERO	10	0.1549279	-22.07434317	-6.73877734	12	6	44.33
11	ENERO	11	0.1721421	-21.92815965	-7.132999362	12	7	7.98
12	ENERO	12	0.1893563	-21.77483326	-7.519491396	12	7	31.17
13	ENERO	13	0.2065705	-21.61443377	-7.8979072	12	7	53.87
14	ENERO	14	0.2237847	-21.44703391	-8.267909854	12	8	16.07
15	ENERO	15	0.2409989	-21.27270936	-8.62917212	12	8	37.75
16	ENERO	16	0.2582131	-21.0915386	-8.981376801	12	8	58.88
17	ENERO	17	0.2754273	-20.90360285	-9.32421708	12	9	19.45
18	ENERO	18	0.2926415	-20.70898601	-9.657396856	12	9	39.44
19	ENERO	19	0.3098557	-20.50777453	-9.980631058	12	9	58.84
20	ENERO	20	0.3270699	-20.30005732	-10.29364595	12	10	17.62
21	ENERO	21	0.3442841	-20.08592571	-10.59617943	12	10	35.77
22	ENERO	22	0.3614983	-19.86547328	-10.8879813	12	10	53.28
23	ENERO	23	0.3787125	-19.63879583	-11.16881354	12	11	10.13
24	ENERO	24	0.3959267	-19.40599124	-11.43845053	12	11	26.31
25	ENERO	25	0.413141	-19.16715941	-11.69667934	12	11	41.80
26	ENERO	26	0.4303552	-18.92240213	-11.94329988	12	11	56.60
27	ENERO	27	0.4475694	-18.67182298	-12.17812519	12	12	10.69
28	ENERO	28	0.4647836	-18.41552726	-12.40098155	12	12	24.06
29	ENERO	29	0.4819978	-18.15362188	-12.6117087	12	12	36.70
30	ENERO	30	0.499212	-17.88621523	-12.81015998	12	12	48.61
31	ENERO	31	0.5164262	-17.61341714	-12.9962025	12	12	59.77

La función de cálculo empleada para definir estos valores es sencilla:

$$\mathrm{tg}A = \sin\lambda * \mathrm{tg}\,(ha)$$

[donde 'ha', medido en grados es: ha = (h * 15) + (ET * 15) / 60 y 'h' es el desplazamiento horario respecto al mediodía (0, -1, -2, ..., +1, +2, ...) ET=Ecuación del Tiempo]

DIA-AÑO	MES	DIA	n-h	ha	tg(A)	A
				º		
1	ENERO	1	0	-0.7260422	-0.0081554	-0.4672587
2	ENERO	2	0	-0.8377593	-0.0094104	-0.539162
3	ENERO	3	0	-0.9484114	-0.0106536	-0.6103822
4	ENERO	4	0	-1.0578954	-0.0118837	-0.6808533
5	ENERO	5	0	-1.1661099	-0.0130996	-0.75051
6	ENERO	6	0	-1.2729547	-0.0143003	-0.8192882
7	ENERO	7	0	-1.3783314	-0.0154845	-0.8871246
8	ENERO	8	0	-1.4821432	-0.0166512	-0.953957
9	ENERO	9	0	-1.5842951	-0.0177994	-1.0197244
10	ENERO	10	0	-1.6846943	-0.018928	-1.0843671
11	ENERO	11	0	-1.7832498	-0.020036	-1.1478265
12	ENERO	12	0	-1.8798728	-0.0211224	-1.2100454
13	ENERO	13	0	-1.9744768	-0.0221862	-1.2709681
256	SETBRE.	12	3	45.974101	0.6658123	33.656166
257	SETBRE.	13	3	46.06776	0.667994	33.742687
258	SETBRE.	14	3	46.161687	0.6701894	33.829576
259	SETBRE.	15	3	46.255782	0.6723963	33.916739
260	SETBRE.	16	3	46.349942	0.6746122	34.004085
261	SETBRE.	17	3	46.444065	0.676835	34.091516
262	SETBRE.	18	3	46.538047	0.6790621	34.178938
263	SETBRE.	19	3	46.631785	0.6812911	34.266255
264	SETBRE.	20	3	46.725175	0.6835195	34.353367
265	SETBRE.	21	3	46.818114	0.6857448	34.440178

6.- Altitud del Sol sobre el horizonte y longitud de la sombra.-

Una vez determinados los valores *'ha'*, (ángulo horario de cada uno de los puntos *hora-calendario* a marcar en el reloj), es el momento de calcular la altitud del Sol sobre el horizonte (α) para cada uno de esos instantes temporales.

Como ya se anticipó en la presentación, (pág. 3), la *altitud* de Sol se relaciona con las magnitudes ya definidas en este momento de la siguiente manera:

$$\sin \alpha = \sin \lambda \,.\, \sin \delta + \cos \lambda \,.\, \cos \delta \,.\, \cos ha$$

La longitud de la sombra proyectada por el vértice del cono sobre la superficie del reloj ya puede determinarse para cada uno de los momentos temporales contemplados. (Véase la fig. 5.2 del punto anterior).

$$\mathrm{tg}\, \alpha = h / s \rightarrow s = h / \mathrm{tg}\, \alpha \rightarrow s = h \,.\, \cos \alpha / \sin \alpha$$

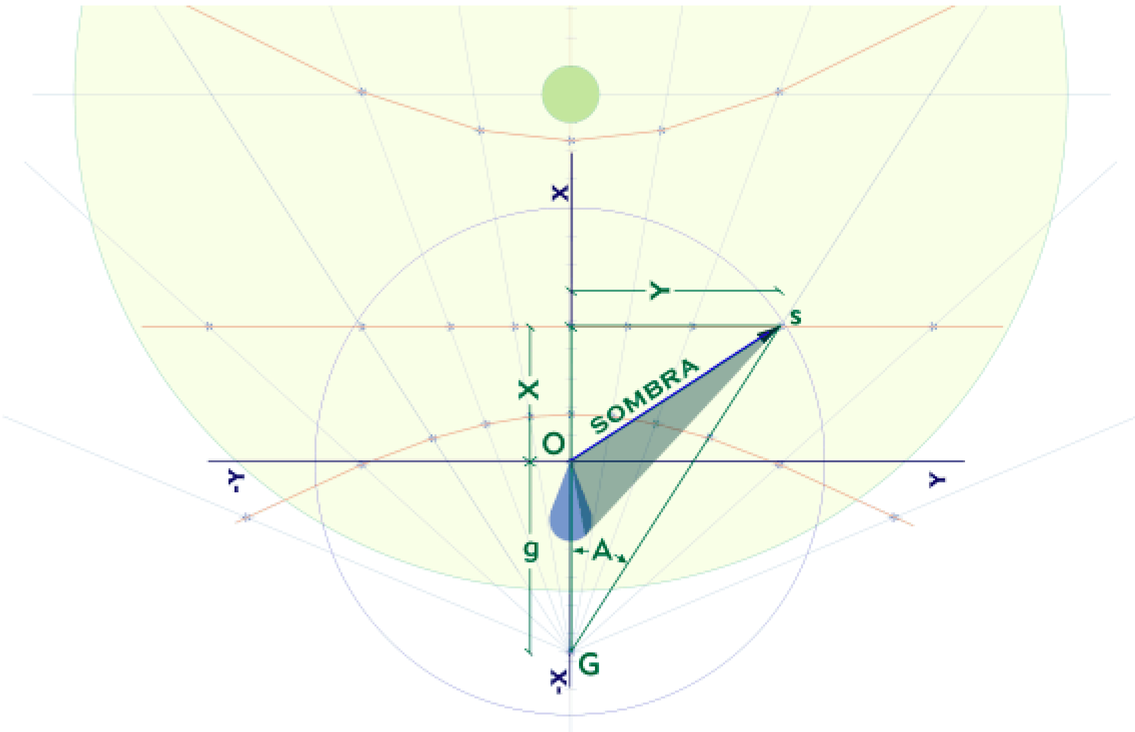
[h = altura del gnomon, **s** = longitud de la sombra desde la vertical del gnomon, α = altitud del sol **]**

DIA-AÑO	MES	DIA	GAMMA	DECLINACIÓN-SOL	ECUAC.-TIEMPO (minutos)	ha	sin(altitud)	ALTITUD	SOMBRA
						Mediodía+3 . 15 h .			
						º			
238	AGOSTO	25	4.0797669	10.69013821	-2.227733346	44.443067	0.6563509	41.022159	648.30123
239	AGOSTO	26	4.0969811	10.34344388	-1.936225719	44.515944	0.6524547	40.726931	655.08741
240	AGOSTO	27	4.1141953	9.994050798	-1.637286923	44.590678	0.6484897	40.427829	662.04598
241	AGOSTO	28	4.1314095	9.64204655	-1.331201736	44.6672	0.6444569	40.12497	669.1794
242	AGOSTO	29	4.1486237	9.287518647	-1.018264942	44.745434	0.6403574	39.818474	676.49018
243	AGOSTO	30	4.1658379	8.9305545	-0.698781001	44.825305	0.6361922	39.508462	683.98087
244	AGOSTO	31	4.1830521	8.571241434	-0.37306371	44.906734	0.6319625	39.195058	691.65411
245	SETBRE.	1	4.2002663	8.209666696	-0.04143585	44.989641	0.6276696	38.878389	699.51257
246	SETBRE.	2	4.2174805	7.845917463	0.29577118	45.073943	0.6233145	38.558583	707.559
247	SETBRE.	3	4.2346948	7.480080859	0.638217735	45.159554	0.6188989	38.235769	715.7962
248	SETBRE.	4	4.251909	7.112243969	0.985556309	45.246389	0.614424	37.910079	724.22705
249	SETBRE.	5	4.2691232	6.742493857	1.337431932	45.334358	0.6098913	37.581645	732.85447
250	SETBRE.	6	4.2863374	6.370917587	1.693482571	45.423371	0.6053024	37.250603	741.68146
251	SETBRE.	7	4.3035516	5.997602243	2.053339543	45.513335	0.6006587	36.917088	750.71107
252	SETBRE.	8	4.3207658	5.622634954	2.416627939	45.604157	0.5959619	36.581238	759.94642
253	SETBRE.	9	4.33798	5.24610292	2.782967052	45.695742	0.5912138	36.24319	769.39069

7.- Reducción a coordenadas rectangulares.-

Llegados a este punto ya es posible dibujar sobre la superficie del reloj las señales que marcan las *analemas,* (un punto para cada hora de cada día del año).

Para cada punto 'P' se tienen dos coordenadas: P(A,s):



[fig. 7.1]

El ángulo A se mide en sentido positivo desde la meridiana (con vértice en G) en el setido de las agujas del reloj, (hacia el Este), y negativo hacia el Oeste.

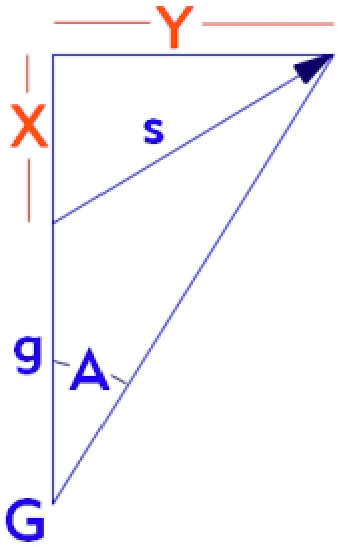
La coordenada 's', (longitud de la sobra, entendida ésta como la proyectada por el vértice del cono), se mide desde el punto 'O', (proyección vertical de dicho vértice sobre la meridiana), hasta *cortar* a la línea definida por el ángulo 'A'.

DIA-AÑO	MES	DIA	GAMMA	DECLINACION-SOL	ECUAC.-TIEMPO (minutos)	SOMBRA	tg(A)	A
275	OCTUBRE	1	4.7166925	-3.25409931	10.80028806	739.31738	0.4131525	22.448089
276	OCTUBRE	2	4.7339067	-3.641929609	11.12523364	749.39878	0.4144422	22.51118
277	OCTUBRE	3	4.7511209	-4.029129325	11.44355515	759.62326	0.4157079	22.573041
278	OCTUBRE	4	4.7683352	-4.415599319	11.75487848	769.99078	0.416948	22.633596
279	OCTUBRE	5	4.7855494	-4.801239619	12.05883587	780.50122	0.4181608	22.692769
280	OCTUBRE	6	4.8027636	-5.185949412	12.35506635	791.1543	0.4193448	22.750487

Aquí quedaría resuelta y terminada la fase de diseño/cálculo del Reloj de Sol. No obstante, resulta evidente que estas coordenadas no son las mejores para trazar sobre la superficie del reloj un número tan elevado de puntos.

Por esta razón hemos preferido transformar estas coordenadas polares a rectángulares con pares P'(X,Y), (ver fig. anterior).

De la propia geometría del sistema, [fig. 7.1], se deducen fácilmente estos valores X,Y.



$$X^2 + Y^2 = s^2$$

$$Y / (X + g) = \mathrm{tg}\, A$$

[recuérdese que ‘g’ es un valor también conocido. Ver pág. 23 en punto 5.-]

Por tanto se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de fácil solución:

$$X = \{ -(2\, d\, \mathrm{tg}^2 A) \pm \sqrt{(4\, g^2\, \mathrm{tg}^4 A) - 4\, (1+\mathrm{tg}^2 A)\, (g^2\, \mathrm{tg}^2 A - s^2)} \} \,/\, 2\, (1 + \mathrm{tg}^2 A)$$

$$Y = \sqrt{(s^2 - X^2)} \quad \text{ó también} \quad Y = (X + g)\, \mathrm{tg}\, A$$

Se deshace la ambigüedad en las soluciones de **X** tomando siempre la raiz obtenida a partir de + $\sqrt{}$ por razones obvias en la geometría del plano.
Y será positivo para **A** > 0 y negativo para **A** < 0.

DIA-AÑO	MES	DIA	GAMMA	DECLINACION-SOL	ECUAC.-TIEMPO (minutos)
306	NOVIEMBRE	1	5.2503329	-14.51171904	16.37896971
307	NOVIEMBRE	2	5.2675471	-14.83025117	16.36526029
308	NOVIEMBRE	3			
309	NOVIEMBRE	4			
310	NOVIEMBRE	5			
311	NOVIEMBRE	6			
312	NOVIEMBRE	7			
313	NOVIEMBRE	8			
314	NOVIEMBRE	9			

a - 12 h - 0

SOMBRA	tg(A)	A	X	Y
796.61336	0.0460708	2.6377993	794	67
806.05064	0.0460321	2.635587	803	68
815.50914	0.045955	2.6311766	813	68
824.98339	0.0458394	2.6245646	822	68
834.46759	0.0456852	2.6157497	832	69
843.95568	0.0454925	2.6047333	841	69
853.44124	0.0452614	2.5915189	851	69
862.91759	0.044992	2.5761125	860	69
872.37771	0.0446843	2.5585225	870	69

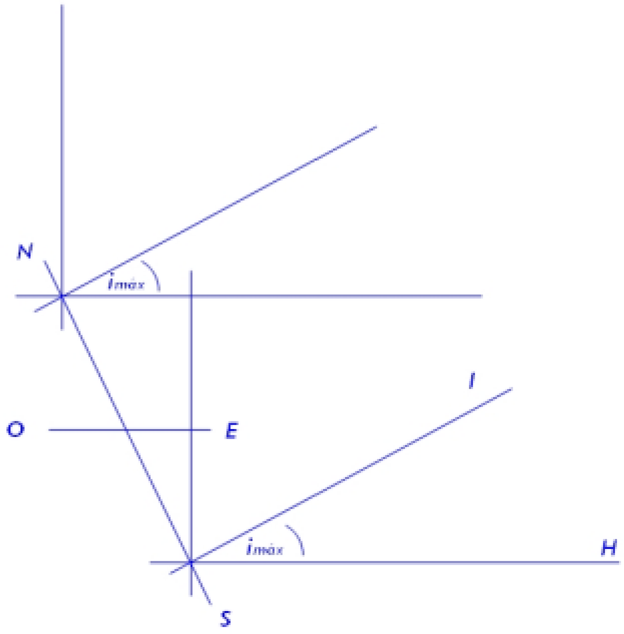
8.- Tratamiento de la pendiente y correcciones sobre coordenadas.-

El plano de desarrollo del ‘reloj’ ha sido sometido a una pendiente para evacuación de aguas superficiales según el eje E-O.

La pendiente tiene una inclinación teórica de 1º. (***imáx = 1º***)

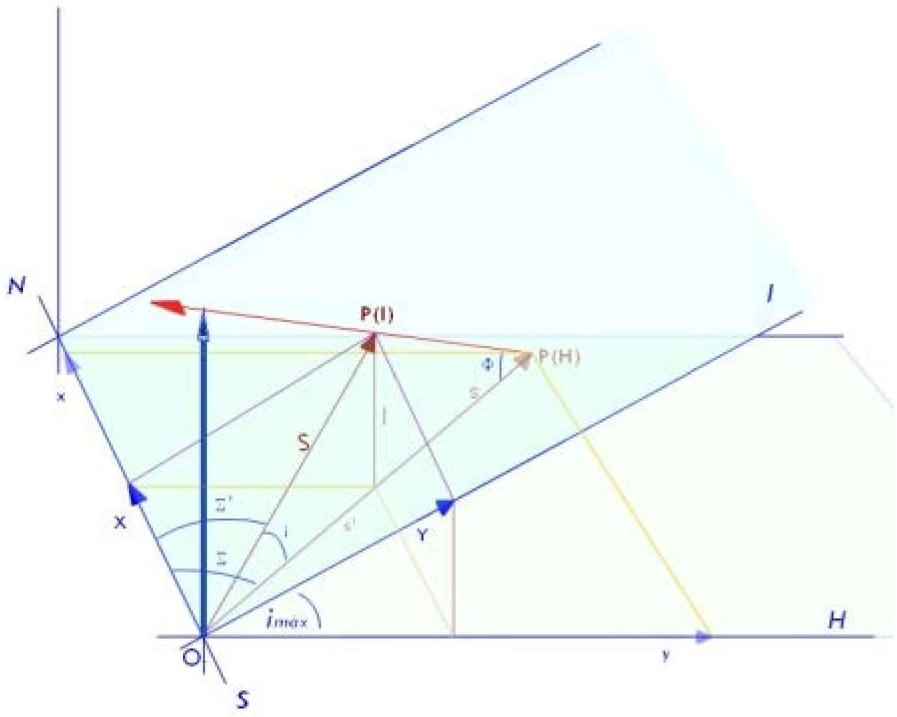
La orientación de la misma (según el eje E-O) ha sido escogida de manera intencionada, (aprovechando la facili-dad para ello de las condiciones del terreno), con objeto de minimizar el impacto de las correcciones a aplicar en los cálculos.

Se ha preferido 'trasladar' estas correcciones a partir de los cálculos efectuados para un plano perfectamente horizontal, en vez de aplicar de partida un cálculo del valor de la 'altitud' (Φ) del sol según este condicionante en cada punto del plano.



Las magnitudes a corregir por el efecto de la pendiente son:

Σ' - ángulo de la 'sombra' en el plano **I** frente al mismo en el plano **H** - (**Σ**)
S - Longitud de la sombra en el plano **I** frente a la misma en el plano **H** - (**s**)
X - Desplazamiento del 'punto de sombra' en el plano **I** según el eje N-S frente al mismo en
el plano **H** - (**x**)
Y - Desplazamiento del 'punto de sombra' en el plano **I** según el eje E-O frente al mismo en
el plano **H** - (**y**)
i - ángulo de inclinación de la línea de sombra (de Longitud **S**) en el plano **I** sobre el plano
H según su posición horaria.



1.- Determinación del ángulo **i** en función de **Σ'**.-

I = S sin i = Y sin imáx ; sin i = (Y/S) sin imáx
Y = S sin Σ'

$$\boxed{\sin i = \sin \Sigma' * \sin i_{máx}}$$

2.- Relación entre **Σ'** y **Σ** en función de **i**.-

X = S cos Σ' = s' cos Σ (por pendiente según eje y – E-O -)
S' = S cos i

$$\boxed{\cos \Sigma' = \cos i * \cos \Sigma}$$

3.- Aproximación válida para **i = 1°** .-

$\cos \Sigma' = \cos i \cos \Sigma \Rightarrow \cos^2 \Sigma' = \cos^2 i \cos^2 \Sigma = (1 - \sin^2 i) \cos^2 \Sigma$

$\cos \Sigma = \cos^2 \Sigma' / (1 - \sin^2 i) = \cos^2 \Sigma' / (1 - \sin^2 i_{máx} \sin^2 \Sigma')$

[imáx=1° -> $\sin^2$ imáx = 3.045 10^{-4}], lo que da una aproximación suficientemente válida de:

$$\boxed{\Sigma' \cong \Sigma}$$

Σ'(°)	Σ(°)	Σ'-Σ(°)
0	0	0
5	4,99924234	0,00075766
10	9,99850769	0,00149231
15	14,9978184	0,00218163
20	19,9971953	0,00280467
25	24,9966575	0,00334251
30	29,9962212	0,0037788
35	34,9958997	0,00410028
40	39,9957028	0,0042972
45	44,9956365	0,00436354
50	49,9957027	0,00429731
55	54,9958995	0,0041005
60	59,9962209	0,00377908
65	64,9966572	0,00334283
70	69,997195	0,002805
75	74,9978181	0,00218192
80	79,9985075	0,00149253
85	84,9992422	0,00075778

4.- Longitud de 'la sombra' (**S**) en el plano inclinado (**I**).-

l / (s-s') = tg Φ
l / s' = tg i
(s-s') tg Φ = s' tg i -> s' = s tg Φ / (tg Φ + tg i)
S = l / sin i = (s-s') tg Φ / sin i = s' tg i / sin i

S = s tg Φ tg i / sin i (tg Φ + tg i) = s tg Φ / cos i (tg Φ + tg i)

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{s \operatorname{tg} \Phi}{\cos i \,(\operatorname{tg} \Phi + \operatorname{tg} i)}}$$

5.- Determinación de las coord. rectangulares (**X,Y**) en el plano inclinado (**I**).-

a) **X** = **S** cos Σ' ≅ **S** cos Σ
cos Σ = x / s

$$\mathbf{X} = \frac{x \;\; \mathrm{tg}\,\Phi}{\cos i\,(\mathrm{tg}\,\Phi + \mathrm{tg}\, i)}$$

b) $\mathbf{Y} = \mathbf{S} \sin \Sigma' \cong \mathbf{S} \sin \Sigma$

$\sin \Sigma = y / s$

$$\mathbf{Y} = \frac{y \;\; \mathrm{tg}\,\Phi}{\cos i\,(\mathrm{tg}\,\Phi + \mathrm{tg}\, i)}$$

DIA-AÑO	MES	DIA	GAMMA	DECLINACION-SOL	ECUAC.-TIEMPO (minutos)
1	ENERO	1	0	-23.05862917	-2.90416896
2	ENERO	2			
3	ENERO	3			
4	ENERO	4			
5	ENERO	5			
6	ENERO	6			
7	ENERO	7			
8	ENERO	8			
9	ENERO	9			
10	ENERO	10			
11	ENERO	11			

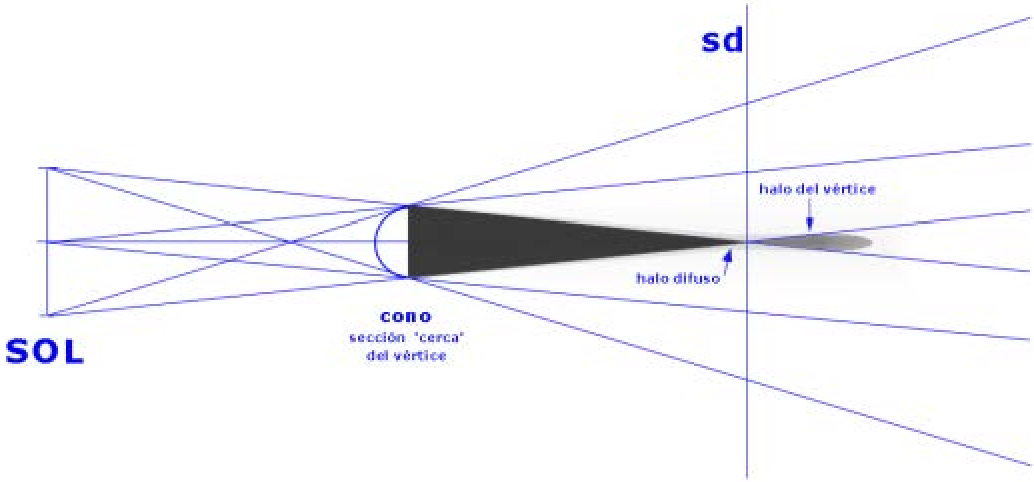
Mediodia - 12 h - 0				
i	E	SOMBRA-i	Xi	Yi
-0.013	-0.749	1113.1	**1113.0**	-14.6
-0.015	-0.865	1109.5	**1109.3**	-16.8
-0.017	-0.981	1105.4	**1105.3**	-18.9
-0.019	-1.096	1101.1	**1100.9**	-21.1
-0.021	-1.210	1096.4	**1096.2**	-23.2
-0.023	-1.323	1091.5	**1091.2**	-25.2
-0.025	-1.435	1086.2	**1085.8**	-27.2
-0.027	-1.547	1080.6	**1080.2**	-29.2
-0.029	-1.657	1074.7	**1074.3**	-31.1
-0.031	-1.766	1068.6	**1068.1**	-32.9
-0.033	-1.873	1062.2	**1061.6**	-34.7

9.- Modelo sobre el comportamiento de la sombra en el límite del vértice del cono.-

Hay un último detalle -de importancia- que considerar. El *gnomon* en este caso es el vértice de un cono que actúa como *puntero* en la superficie del reloj a través de la sombra que el mismo proyecta. Evidentemente dicho vértice, cuya altura sobre el suelo (**h**) es uno de los parámetros fundamentales en toda la geometría del reloj, es en ese límite de altura *h* un punto 'idealmente' sin *grosor.*

Esto, unido a las dimensiones -grandes- del reloj y al hecho de que el *foco de luz:* el Sol, no es un foco puntual, sino que presenta un tamaño angular desde La Tierra de unos 32' de arco, obliga a modelizar el comportamiento de la sombra en ese límite extremo utilizado como *puntero* del reloj/calendario.

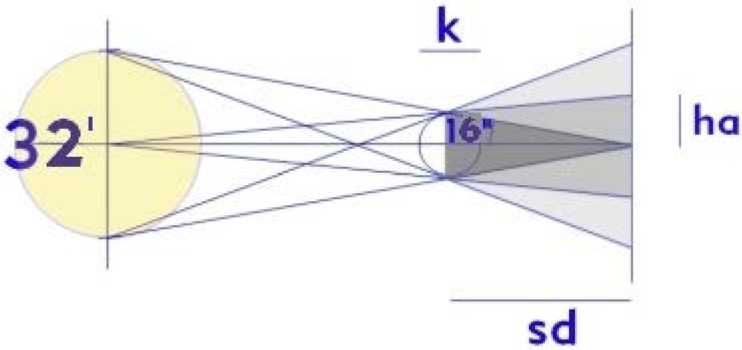
En una primera aproximación puede esperarse que la sombra en el extremo contemplado se diluya en un halo difuso de difícil definición.



Aparece, por tanto, una sombra que puede ser considerada como definida hasta una distancia *'sd'*, (sombra definida), del cono. Esta distancia depende evidentemente del diámetro de la sección de cono contemplada. Si el punto de la superficie del reloj donde ha de proyectarse esta sombra está a una distancia mayor que *'sd'*, no se producirá en dicha superficie la imagen necesaria.

Es preciso establecer, por tanto, una relación entre:

S, longitud de la sombra calculada para cada día-hora del reloj, y
K, diámetro de la sección de cono mínima capaz de proyectar una sombra definida a una distancia *sd* mayor que **S**.



[fig. 9.2]

El radio angular del Sol medido desde La Tierra es un parámetro que fluctúa entre un valor máximo, (16'24), y un valor mínimo, (15'7), también debido a que la órbita de La Tierra en torno al Sol no es circular sino elíptica, con un 'afelio', (máximo alejamiento, coincidente aproximadamente con el solsticio de verano para el hemisferio norte), al que correspondería el tamaño angular mínimo del Sol, y un perihelio, (mínima distancia de La Tierra al Sol, hacia el solsticio de invierno), momento en el que el Sol presenta su tamaño máximo.

El valor medio de este ángulo es 15'97 (**~ 16'**, que será el valor que utilizaremos en este modelo), con una fluctuación de 1.67% que se corresponde con el valor de la excentricidad de la órbita terrestre.

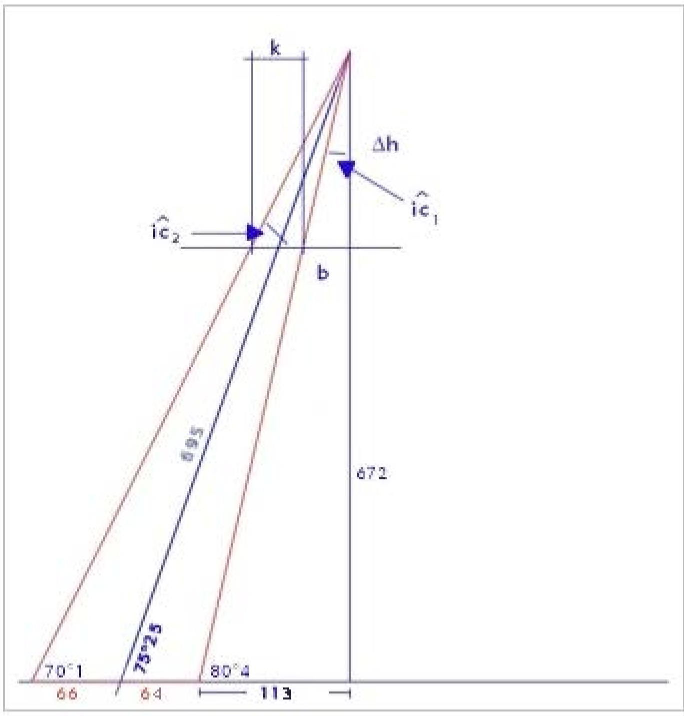
Este parámetro está afectado igualmente por otros fenómenos, como la refracción de la luz del Sol producida por la atmósfera terrestre, pero no los consideraremos aquí.

La relación a partir de esta geometría es sencilla:

$$\text{tg } \mathbf{16'} = \tfrac{1}{2}\, k / sd \;\rightarrow\; sd = \mathbf{107.43}\, k \qquad (1)$$

$$y,\quad sd \geq S \qquad (2)$$

Pero interesa establecer esta relación en función de **h**, cosa que se puede hacer a partir de la geometría del cono:



$$\text{tg } \hat{ic}_1 = b / \Delta h \rightarrow b = 0.169\, \Delta h$$

$$\text{tg } \hat{ic}_2 = \Delta h / (b+k)$$

$$k = 0.193\, \Delta h \qquad (3)$$

Combinando (1) y (3) ... $sd = \mathbf{20.722}\, \Delta h$, y aplicando la condición (2):

$$sd \geq S \rightarrow \mathbf{20.722}\, \Delta h \geq \mathbf{S} \rightarrow \Delta h \geq \mathbf{S / 20.722}$$

Es decir, en función de la longitud de la sombra (**S**) según la altitud del Sol (α) en un hora/día determinados, hay un límite efectivo para la *singularidad* del vértice del *gnomon* que produce un *achatamiento* del mismo, dejando un final *romo* del cono. O lo que es lo mismo, la altura **h** del cono se reduce en un pequeño decremento Δh al tiempo que el vértice mismo abandona su ideal forma de punto adimensional adquiriendo una sección extensa de diámetro **k**.

La altura efectiva del cono $\mathbf{h_{ef}}$ pasa a ser:

$$\boxed{\mathbf{h_{ef} = h - \Delta h = 672 - (S / 20.722)}}$$

Esta limitación es evidentemente significativa. Para los valores cortos de **S** -verano- supone una reducción efectiva de la altura del cono del orden de 10 cm al mediodía, y es más notoria a medida que **S** crece, (horas alejadas del mediodía y/ó sombras en invierno -66 cm a las 12h del 21 de Diciembre-), lo que obliga a recalcular todas las magnitudes que quedan afectadas por la reducción de **h**, (**g** -vértice de los husos horarios-, nuevo valor de la sombra y las coordenadas

(X,Y), que finalmente son las que se llevan a la superficie del reloj).

	CORRECCION POR EFECTO DE LA SOMBRA – (12h – 1-5 Enero)			
SOMBRA-(S)	Δh	hef= h - Δh	(g-corr)	SOMBRA -corregida
1346,71	64,82	617,53	734,46	1218,79
1342,27	64,60	617,75	734,72	1215,18
1337,41	64,37	617,98	734,99	1211,25
1332,16	64,12	618,23	735,29	1206,98
1326,51	63,85	618,50	735,62	1202,40

	CORRECCION POR EFECTO DE LA SOMBRA – (12h – 1-5 Julio)			
SOMBRA-(S)	Δh	hef= h - Δh	(g-corr)	SOMBRA -corregida
208,18	10,02	672,33	799,63	205,13
209,15	10,07	672,28	799,58	206,06
210,20	10,12	672,23	799,52	207,08
211,34	10,17	672,18	799,45	208,19
212,57	10,23	672,12	799,38	209,38

(recuérdese que todas las medidas referidas en este *cuaderno* están expresadas en *centímetros*)