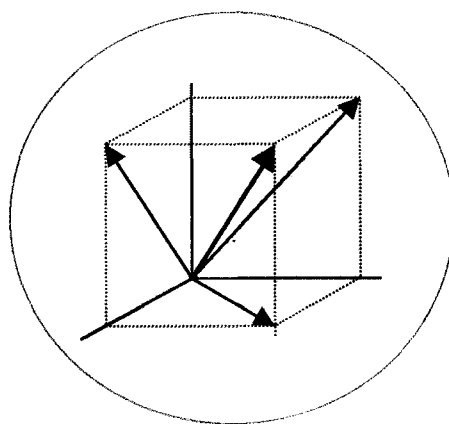


ASOCIACIÓN DE AMIGOS DE LOS RELOJES DE SOL

SEPARATA DEL BOLETÍN ANALEMA

GNOMÓNICA VECTORIAL



ANTONIO DE VICENTE CANDEIRA

MARZO 2005

Gnomónica Vectorial ©
Por
ANTONIO DE VICENTE CANDEIRA
Doctor Ingeniero Naval

La asociación de Amigos de los Relojos de Sol ha publicado en su Boletín informativo "*Analema*" una serie de artículos de A. de Vicente con el título GNOMÓNICA VECTORIAL, que ahora son recogidos en esta separata, reeditados y corregidos por su autor.

Entendemos que la presentación de este método vectorial para el cálculo matemático de todas las variables y parámetros que definen un reloj solar constituye una novedad absoluta, ya hasta ahora no se había elaborado ningún otro método de cálculo que resuma y sintetice todas las fórmulas y desarrollos numéricos necesarios para el diseño de las líneas horarias, curvas de altura, trayectorias diarias, horas de iluminación y de ortos y ocasos, y, en general cuantas líneas y gráficos son necesarios para construir un reloj solar de cualquier tipo, situación y posición. Este método ha sido desarrollado por medio de un programa de ordenador.

INTRODUCCION

Movimiento de una Sombra

El estudio y cálculo de los Relojes de Sol, está basado en el movimiento aparente del Sol con relación a la Tierra y donde un Rayo Solar, pasando por la cabeza de un Estilo, o cumpliendo ciertas condiciones, incide en el punto P de una superficie S situada en cierto lugar geográfico H.

Se estudia, por tanto:

- a) El versor Rayo Solar, Angulo Horario y Declinación Solar
- b) El Estilo, y sus componentes..
- c) La superficie (S), normalmente un plano definido por su versor ($\overline{A-H}$).
- d) El punto P, intersección del Rayo Solar y la superficie (S), expresado por el Vector Horario ($\overline{P-H}$), base fundamental de la Gnomónica Vectorial
- e) Líneas Horarias Babilónicas, Itálicas y Sidéreas
- f) Demás elementos gnomónicos.

Con este sistema Vectorial, se puede calcular un Reloj en cualquier Plano y con cualquier Estilo, apoyándose en seis Triedros Ortogonales y nueve Coeficientes Básicos, donde las únicas variables, tanto en las fórmulas vectoriales como en las algébricas, son el Angulo Horario y la Declinación Solar; y teniendo en cuenta en este caso, que los versores Rayo Solar y Plano Base, son solo función de los citados Coeficientes y el Vector Horario es de dichos Coeficientes y de las componentes del Estilo

Pero si este último es un versor paralelo al Eje Terrestre o Normal al Plano , el Vector Horario y el resto de los demás elementos del Reloj, son función de los ya mencionados Coeficientes y en algunos casos también de la posición de otro punto geográfico K, con respecto al H.

INDICE

Capítulo I	A) Triedros Básicos	página 1
Capítulo II	B) Ecuación del Rayo Solar y Coeficientes Básicos	página 5
Capítulo III	C) Base del Reloj ; D) Estilo.....	página 9
Capítulo IV	E) Vector Horario	página 12
Capítulo V	F) Codeclinación e Inclinación de un Plano.....	página 20
Capítulo VI	G) Reloj Bifilar	página 26
Capítulo VII	H) Altura Solar y Azimut.....	página 30
Capítulo VIII	J) Iluminación.....	página 34
Capítulo IX	K) Líneas Horarias Equinocciales ..	página 40
Capítulo X	L) Líneas Babilónicas, Itálicas y Sidéreas.....	página 46
Capítulo XI	M) Teoría de los planos paralelos...	página 54

Registro Propiedad Intelectual
nº M-006415/2004

CAPITULO I.

El estudio de la Gnomónica empezó matemáticamente a través de la geometría métrica, para pasar de modo paulatino a apoyarse en la trigonometría, álgebra, analítica, etc, según estas ciencias avanzaban. Al aparecer el cálculo vectorial, entre sus aplicaciones destaca el estudio de la mecánica racional es decir, del movimiento. Y siendo la gnomónica el movimiento de una sombra (que no tiene masa y por tanto no hay consumo de energía), la cinemática vectorial facilita su desarrollo de modo notable, apoyándose en una serie de Triedros ortogonales y nueve coeficientes que aparecen en todas las fórmulas vectoriales y algébricas, que se estudian a continuación.

A) TRIEDROS BASICOS

La materialización de un espacio geométrico, puede representarse físicamente, mediante un Triedro ortogonal y dado que los elementos gnomónicos pertenecen a distintos espacios. un conjunto de Triedros debidamente relacionados entre si, permite trasladar a uno determinado, los componentes de los demás, mediante un cambio de ejes. Este es uno de los métodos que se aplicaran en el desarrollo de la Gnomónica Vectorial

A continuación se estudian cinco Triedros básicos, y sus relaciones a través de diversos vectores y versores.

TRIEDRO BASE (0)

Representa el espacio gnomónico fijo, donde el Sol y la Tierra, definen el plano meridiano $Y_0 = 0$ siendo el Ecuatorial el $Z_0 = 0$. Es base de los vectores de giro $\vec{j}_0 \delta'$ (Declinación Solar) y $\vec{k}_0 \varphi'$ (Angulo Horario). que generan respectivamente los Triedros (1) y (2) Sus ejes por tanto son: Fig. (A-1) y Fig. (A-2)

- Eje $X_0 H$ - Intersección del plano Meridiano ya citado, con el Ecuatorial. Celeste
- Eje $Y_0 H$ - Normal al anterior en el plano Ecuatorial.
- Eje $Z_0 H$ - Eje Celeste.

TRIEDRO (1)

Generado por el vector de giro $-\vec{j} \delta'$, define en el espacio Sol - Tierra, su movimiento relativo comprendido, entre los límites $\pm 23^\circ 27'$ siendo la base del versor Rayo Solar $(S-H) = -\vec{i}_1$ Sus ejes vienen dados por: Fig. (A-1)

- Eje $X_1 H$ - Línea Sol - Tierra.
- Eje $Y_1 H$ - Coincide con el eje $Y_0 H$
- Eje $Z_1 H$ - Normal a los anteriores.

TRIEDRO (2)

El giro debido al vector $\vec{k}_0 \varphi'$ genera este Triedro, cuyo espacio es el de la Esfera Terrestre, donde el punto geográfico H, está indicado por sus coordenadas α (Latitud) y λ (Longitud), siendo φ_{hk} ó λ_{hk} la diferencia de longitudes entre los puntos H y el K. Es base del vector de giro $\vec{i}_2 \alpha'$. Fig. (A-2) y Fig. (A-3)

- Eje $X_2 H$ - Giro del eje $X_0 H$ el ángulo φ en el plano Ecuatorial. Origen de la longitud λ
- Eje $Y_2 H$ - Giro del eje $Y_0 H$ el ángulo φ en el plano Ecuatorial.
- Eje $Z_2 H$ - Eje Terrestre. Coincide con el eje de la Esfera Celeste.

TRIEDRO (3)

Está generado al aplicar el vector de giro $\bar{T}_2 \alpha'$ al Triedro (2) siendo su espacio el entorno geográfico del punto H; es base del vector de giro $\bar{T}_3 \gamma'$ (codeclinación). Sus ejes son los siguientes; Fig. (A-1), Fig. (A-2) y Fig. (A-3).

- Eje $X_3 H$ - Coincide con el $X_2 H$. El sentido positivo indica el Oeste
Eje $Y_3 H$ - Giro del eje $Y_2 H$ el ángulo $(90 - \alpha)$: El sentido positivo indica es Sur.
Eje $Z_3 H$ - Giro del eje $Z_2 H$ el ángulo $(90 - \alpha)$. El sentido positivo coincide con la normal del lugar.

TRIEDRO (A)

El espacio de este Triedro corresponde, en el Triedro (3), a la orientación del plano (A) ($Z_a = 0$), como base del reloj. Queda definido por su versor $(\bar{A} - \bar{H})_a = \bar{T}_a$ mediante los vectores de giro $\bar{T}_3 \gamma'$ (codeclinación) y $\bar{T}_a i'$ (inclinación), y donde este último se aplica en el eje $X_a H$ del nuevo Triedro. Es base a su vez del vector de giro $\bar{T}_a \phi'$. Sus ejes son; Fig. (A-3)

- Eje $X_a H$ - Taza del plano horizontal $Z_3 = 0$ con el $Z_a = 0$
Eje $Y_a H$ - Normal al anterior en el plano (A)
Eje $Z_a H$ - Normal al plano (A)

TRIEDRO (B)

Con el mismo espacio que el anterior, tiene la particularidad de que si $\phi = \phi_a$ (que se calculará posteriormente), el eje $Y_b H$ es paralelo o coincide con el eje de simetría del reloj y además facilita el estudio de cierto tipo de relojes. Es base del vector de giro $\bar{T}_b \psi$ (Angulo de Elevación del Estilo). Sus ejes son los siguientes: Fig. (A-3)

- Eje $X_b H$ - Giro del eje $X_a H$ el ángulo ϕ en el plano $Z_a = 0$
Eje $Y_b H$ - Giro del eje $Y_a H$ el ángulo ϕ en el plano $Z_a = 0$
Eje $Z_b H$ - Coincide con el $Z_b H$

Vectores y Versores. Angulo Horario

Tal como se indicó en párrafos anteriores, son cuatro los vectores función del tiempo, hasta ahora presentados; el "Angulo Horario" y la "Declinación Solar", ambas funciones directas, que se estudian a continuación, y el "Rayo Solar" y el "Vector Horario", que lo son a través de los dos anteriores:

El "Angulo Horario" está generado por el vector $\bar{T}_0 \phi'$ cuyo valor viene dado por:

$$(A.1) \quad \phi' = 360^\circ / 24^h \text{ (Grados / Hora)} = \text{Velocidad Angular del Giro Terrestre} = C^\circ$$

Integrando esta ecuación, dicho ángulo, toma la expresión

$$(A.2) \quad \phi = 15t + C \quad \text{donde } t \text{ es el tiempo referido al punto geográfico H ó al K, según el caso a estudiar.}$$

El cálculo de C se realiza del siguiente modo teniendo en cuenta que;

- 1º) El origen del Angulo Horario, se encuentra, por definición en el eje $X_0 O$: Figs (A-1) y (A-2)
-2º) Las 12^h del punto geográfico K, coinciden con el ángulo $\phi_{12} = 270^\circ + \phi_{hk}$ del punto geográfico H; con ello se llega a la relación, donde $\phi_{hk} = \lambda_h - \lambda_k$

$$(A.3) \quad 270^\circ + \phi_{hk} = 15 \times 12_k + C$$

y por consiguiente, a la fórmula final

$$(A.4) \quad \phi_{H1} = 15t_K + \phi_{hk} + 90^\circ \quad \text{"Angulo Horario" del punto H, con la hora del K.}$$

Si se desea la hora de K en H, con adelanto / atraso (Huso Horario), se añade al ángulo ϕ_H el término $\pm 15T$, siendo T el número entero que define el huso a partir del punto geográfico H.

El valor de la constante $\underline{C}$, es función del origen del "Angulo Horario", por lo cual, al variar dicho origen, también lo hace $\underline{C}$. Tal es el caso de las horas gnomónicas Babilónicas ó Itálicas, que se estudiarán en su momento.

-En cuanto a la "Declinación Solar", de función compleja y con unidad de tiempo el día, no se calcula en este estudio, pero se encuentra tabulada en cualquier tratado de Astronomía.

Resumen de los Versores y Vectores

Independientemente de los versores $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ que definen el sentido de los ejes principales de cada Triedro, los siguientes son propios de la Gnomónica Vectorial..

- a) Versor "Rayo solar" $(\overline{S-H}) = \bar{i}_1$ Su origen se halla en el Triedro (1). Es función de la "Declinación Solar" δ , del "Angulo Horario" ϕ y en los Triedros (3), (A) y (B) de los ángulos α, i, γ , a través de nueve parámetros, denominados "coeficientes trigonométricos de posición" abreviadamente (c.t.p), ó Coeficientes, que se definirán en el próximo Capítulo
 - b) Vector "Declinación Solar" $\bar{i}_b \delta'$ Aplicado en el Triedro (0), define el movimiento aparente del Sol. Es función del tiempo.
 - c) Vector "Angulo Horario" $\bar{k}_0 \phi'$. Situado en el Triedro (0), es función lineal del tiempo. Su origen es el eje $X_0 H$.
 - d) Vector de giro "Latitud Geográfica" $\bar{i}_2 \alpha'$ Está situado en el Triedro (2), siendo $\alpha' = 0$ y por tanto $\alpha = C^{te}$
 - e) Vector de giro "Longitud Geográfica" $\bar{k}_2 \lambda'$. Como en el caso anterior se halla en el Triedro (2), se verifica que $\lambda = C^{te}$
 - f) Vector de giro "Codeclinación" $\bar{k}_3 \gamma'$. Sobre el Triedro (3), define el ángulo del versor (A-H) sobre el plano horizontal $Z_3 = 0$. Similar a los casos -d) y -e) $\gamma = C^{te}$
 - g) Vector de giro "Inclinación" $\bar{i}_3 i'$. Sito en el Triedro (A) indica la elevación del versor (A-H) sobre el horizontal de H. Consecuentemente $i = C^{te}$
 - h) Vector "Elevación Estilo" $\bar{i}_b \psi'$ Indica la elevación del Estilo. Como vector de giro $\psi = C^{te}$
 - i) Vector $\bar{k}_a \phi'$ Indica el giro del Triedro (B) sobre el (A).
 - j) Versor del plano base $(A-H) = \bar{k}_a$. Define su situación en cualquier Triedro. Función de los ángulos α, i y γ a través de "c.t.p"
 - k) Versor "Estilo (P_0-H)" Expresado en cualquier Triedro mediante sus componentes cartesianos P_x, P_y y P_z por los ángulos ϕ_a y ψ ó por varios "c.t.p"
 - l) "Vector Horario" $(\overline{P-H})$ Define el lugar geométrico del punto P, cumpliendo diversas condiciones. Es función de la "Declinación Solar", del "Angulo Horario" y de los "c.t.p"
- De lo anteriormente expuesto, quedan definidos tres versores; seis vectores de giro con valor angular C^{te} y los tres restantes variables.

CAPÍTULO II

B) Ecuación del Rayo Solar y Coeficientes

Se ha definido el "Rayo Solar", en el capítulo anterior, mediante el versor $(\overline{S-H})_i = \overline{i}_i$. Al proyectarlo sucesivamente sobre los Triedros (2), (3), (A) y (B) se llega, en este último, a la ecuación vectorial:

$$(B.1) \quad (\overline{S-H})_b = \overline{i}_b U_b + \overline{j}_b V_b + \overline{k}_b W_b \quad \text{siendo los componentes del versor, los siguientes:}$$

$$(B.1.1.) \quad \begin{aligned} U_b &= (-b \sin \phi + n \cos \phi) \sin \varphi \cos \delta + (a \sin \phi - m \cos \phi) \cos \varphi \cos \delta + (j \sin \phi + h \cos \phi) \sin \delta \\ V_b &= (-n \sin \phi - b \cos \phi) \sin \varphi \cos \delta + (m \sin \phi + a \cos \phi) \cos \varphi \cos \delta + (-h \sin \phi + j \cos \phi) \sin \delta \\ W_b &= -c \sin \phi \cos \delta - d \cos \phi \cos \delta - f \sin \delta \end{aligned}$$

Los nueve coeficientes de estas fórmulas, ó "Coeficientes Trigonométricos de Posición", abreviadamente "c.t.p", se hallan en todas las fórmulas de Gnomónica Vectorial, como únicos coeficientes de las variables vectoriales ó algébricas. Sus valores, en función de los ángulos α, γ, i , están expresados por:

$$(B.2) \quad \begin{aligned} a &= -\sin \alpha \cos \gamma & j &= \cos \alpha \sin i \sin \gamma + \sin \alpha \cos i \\ b &= -\sin \alpha \sin i \sin \gamma + \cos \alpha \cos i & c &= -\sin \alpha \cos i \sin \gamma - \cos \alpha \sin i \\ m &= \sin \gamma & d &= \cos \alpha \cos \gamma \\ n &= -\sin \alpha \cos \gamma & f &= -\cos \alpha \cos i \sin \gamma + \sin \alpha \sin i \\ h &= -\cos \alpha \cos \gamma \end{aligned}$$

En el caso de que el versor "Rayo Solar" esté situado en el Triedro (A), caso mas normal en Gnomónica, debe cumplirse la condición que el ángulo $\phi = 0$; si en el Triedro (3), además, en los "c.t.p" debe verificarse, que los ángulos $i = \gamma = 90^\circ$. Y por último, en el Triedro (2), $i = \gamma = \alpha = 90^\circ$. En el primer caso, las fórmulas del versor y sus componentes, son, respectivamente:

$$(B.3) \quad (\overline{S-H})_a = \overline{i}_a U_a + \overline{j}_a V_a + \overline{k}_a W_a$$

$$(B.3.1) \quad \begin{aligned} U_a &= n \sin \varphi \cos \delta - m \cos \varphi \cos \delta + h \sin \delta \\ V_a &= -b \sin \varphi \cos \delta + a \cos \varphi \cos \delta + j \sin \delta \\ W_a &= -c \sin \varphi \cos \delta - d \cos \varphi \cos \delta - f \sin \delta \end{aligned}$$

Las relaciones existentes entre los "c.t.p" se hallan aplicando tres teoremas vectoriales en las ecuaciones de paso entre los Triedros (2) y (A), que tienen la particularidad de ser solamente función de estos "c.t.p", propiedad que se aplicará con frecuencia. Al proyectar los versores de un triedro en el otro, (se omite este cálculo), se llega a las fórmulas siguientes

$$(B.4.1) \quad \begin{aligned} \overline{i}_2 &= \overline{i}_a m - \overline{j}_a a + \overline{k}_a d \\ \overline{j}_2 &= \overline{i}_a n - \overline{j}_a b - \overline{k}_a c \\ \overline{k}_2 &= -\overline{i}_a h - \overline{j}_a j + \overline{k}_a f \end{aligned} \quad (B.4.2) \quad \begin{aligned} \overline{i}_a &= \overline{i}_2 m + \overline{j}_2 n - \overline{k}_2 h \\ \overline{j}_a &= \overline{i}_2 a - \overline{j}_2 b - \overline{k}_2 j \\ \overline{k}_a &= \overline{i}_2 d - \overline{j}_2 c + \overline{k}_2 f \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se deduce:

- 1º) Cada versor de un triedro queda definido en el otro por 3 "c.t.p" que a su vez son sus cosenos directores; la suma de sus cuadrados es la unidad. Aplicado en los dos Triedros, se tiene

$$(B.5) \quad \begin{array}{ll} m^2 + a^2 + d^2 = 1 & m^2 + n^2 + h^2 = 1 \\ n^2 + b^2 + c^2 = 1 & a^2 + b^2 + f^2 = 1 \\ h^2 + f^2 + f^2 = 1 & d^2 + c^2 + f^2 = 1 \end{array}$$

- 2º) El producto escalar de cada dos versores es nulo, es decir $\bar{i}_2 \times \bar{j}_2 = 0$ etc, por tanto,

$$(B.6) \quad \begin{array}{ll} -mn - ab + cd = 0 & -ma - nb + hj = 0 \\ nh - bj + cf = 0 & ad - bc + jf = 0 \\ -mh + aj + df = 0 & -md + nc + hf = 0 \end{array}$$

- 3º) El producto vectorial de dos versores es igual al tercero. Su ecuación es:

$$(B.7.1) \quad \bar{i}_2 \wedge \bar{j}_2 = \bar{k}_2 \quad \text{es decir} \quad ; ; \quad \begin{vmatrix} \bar{i}_a & \bar{j}_a & \bar{k}_a \\ m & -a & d \\ n & -b & -c \end{vmatrix} = -\bar{i}_a h - \bar{j}_a j + \bar{k}_a f$$

Aplicando la formula anterior a los restantes versores de los Triedros (2) y (A), se llega, por duplicado, a las expresiones siguientes:

$$(B.7.2) \quad \begin{array}{ll} a = nf - ch & j = -mc - nd \\ b = -mf - dh & c = -ah - mj \\ m = -bf - cj & d = -bh - nj \\ n = af - dj & f = an - bm \\ h = -ac - bd \end{array}$$

Se pueden deducir así mismo, el cálculo de cada uno de ellos mediante

$$(B.7.3) \quad \begin{array}{l} a = \partial d / \partial i = (\text{sen } \alpha)^{-1} \partial b / \partial \gamma = -(\text{cos } \alpha)^{-1} \partial j / \partial \gamma = (\text{cos } \alpha)^{-1} \partial^2 t / \partial i \partial \gamma \\ b = \partial j / \partial \alpha = -\partial c / \partial i \\ m = (\text{sen } i)^{-1} \partial a / \partial \gamma = (\text{sen } \alpha)^{-1} \partial n / \partial \gamma = -(\text{cos } i)^{-1} \partial d / \partial \gamma = (\text{cos } \alpha)^{-1} \partial h / \partial \gamma \\ n = (\text{cos } i)^{-1} \partial c / \partial \gamma = -\partial h / \partial \alpha = -\text{tag } \alpha (\text{sen } i)^{-1} \partial j / \partial \gamma \\ h = (\text{cos } i)^{-1} \partial f / \partial \gamma = \partial n / \partial \alpha \\ j = -\partial b / \partial \alpha = \partial f / \partial i \\ c = \partial b / \partial i = -\partial f / \partial \alpha \\ d = -\partial a / \partial i = -(\text{cos } \alpha)^{-1} \partial f / \partial \gamma = (\text{sen } \alpha)^{-1} \partial c / \partial \gamma \\ f = \partial c / \partial \alpha = -\partial j / \partial i \end{array} \quad ($$

En resumen, 21 relaciones algebraicas que enlazan entre sí a los 9 "c.t.p", que facilitan notablemente el calculo gnomónico y 24 en derivadas parciales

Representación gráfica

El Triángulo de Posición ,Fig.(B-1),está definido por los vértices siguientes:

- PN ; Polo Norte, Zenit del Triedro (2) (0,0,1)₂ Versor $\bar{k}_2$
- Z ; Zenit del punto geográfico H del Triedro (3), (0,0,1)₃ Versor $\bar{k}_3$
- A ; Zenit del Triedro (A) ,(0.0.1)_a siendo sus lados PN-Z=(90°-α); Z-A=(90°-i) Versor $\bar{k}_a$ y
- A -PN= (90°-ψ₀), (donde ψ₀ es el ángulo complementario del lado A-PN).

Asimismo se conocen los ángulos $Z = (90^\circ - \gamma)$ y $A = \varphi_a$ (dado por $\tan \varphi_a = -h/j$)

Al prolongar los lados PN-Z y A-Z respectivamente, con los valores angulares α e i , se generan otros tres triángulos numerados, (2), (3) y (4), con los nuevos vértices Q (0,-1,0)_a y S (0,1,0)₂. Estos triángulos conforman el cuadrilátero esférico PN-Q-S-A, o cuadrilátero K, cuyas diagonales son iguales a 90° , y que goza de las siguientes propiedades:

-1º Calculando los lados de K, mediante los triángulos citados, se llega al siguiente resultado:

$$(B.8) \quad \begin{array}{ll} \cos PN-Q = j & \text{Los cosenos de los lados del cuadrilátero} \\ \cos Q-S = b & \text{K, coinciden con el valor de cuatro} \\ \cos S-A = -c & \text{"c.t.p"} \\ \cos A-PN = f & \end{array}$$

-2º Las alturas correspondientes a los triángulos (2) y (3) (que coinciden con las distancias desde los vértices del K, a sus dos diagonales), tienen los siguientes valores, dados por sus senos:

$$(B.9) \quad \begin{array}{ll} \text{sen PN-PN}_1 = -h & \text{Los senos de las alturas de los} \\ \text{sen Q-Q}_1 = -a & \text{triángulos (2) y (3), son iguales} \\ \text{sen S-S}_1 = -n & \text{a cuatro de los "c.t.p"} \\ \text{sen A-A}_1 = d & \end{array}$$

: Como resumen, los "c.t.p" pueden dividirse por su expresión matemática en los tres grupos siguientes

- 1º) Grupo Binomio formado por los b, c, j, f; son función de los ángulos α, γ, i
- 2º) Grupo Monomio, con los a, n, h, d; son función de los ángulos α, γ o i, γ
- 3º) Grupo Monoparámetro al que pertenece el "c.t.p" m, función únicamente del ángulo γ .

Al desarrollarse los diversos capítulos de la "Gnomónica Vectorial", aparecerán otros grupos, normalmente de tres "c.t.p", que definen, cada uno de ellos, los componentes de versores, vectores, ecuaciones, o elementos básicos; por ejemplo el grupo "h, j, f", aparece como único componente del versor "Estilo paralelo al Eje Terrestre" y en sus corolarios. Las relaciones existentes entre los diversos "c.t.p" y los ángulos de los cuatro triángulos ya citados, no se consideran en este estudio.

Anexo

Pasar de un Triedro a otro, cambiando los ángulos α, i, γ en los "c.t.p"

Siendo las ecuaciones:

$$(B.4.1) \quad \begin{array}{l} \bar{l}_2 = \bar{l}_a m - \bar{j}_a a + \bar{k}_a d \\ \bar{l}_2 = \bar{l}_a n - \bar{j}_a b - \bar{k}_a c \\ \bar{k}_2 = -\bar{l}_a h - \bar{j}_a j + \bar{k}_a f \end{array} \quad \text{y} \quad (B.4.2) \quad \begin{array}{l} \bar{l}_a = \bar{l}_2 m + \bar{j}_2 n - \bar{k}_2 h \\ \bar{j}_a = -\bar{l}_2 a - \bar{j}_2 b - \bar{k}_2 j \\ \bar{k}_a = \bar{l}_2 d - \bar{j}_2 c + \bar{k}_2 f \end{array}$$

se calculan los versores de cualquier Triedro en función de ciertos valores de los ángulos α, i, γ del siguiente modo: Por ejemplo:

- A partir de las fórmulas (B.4.1) y (B.4.2)

$$\begin{array}{lll} 1^\circ) & \bar{k}_2 = -\bar{l}_a h - \bar{j}_a j + \bar{k}_a & \text{Del Triedro (2) al (A)} \\ 2^\circ) & \text{Si } \gamma = i = 90^\circ & \text{" " (2) al (3)} \\ 3^\circ) & \text{Si } \alpha = 90^\circ & \text{" " (3) al (A)} \\ 4^\circ) & \text{Si } \gamma = i = \alpha = 90^\circ & \text{" " (2) al (2)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{k}_2 = -\bar{j}_3 \cos \alpha + \bar{k}_3 \sin \alpha \\ \bar{k}_2 = \bar{k}_3 = -\bar{j}_a \cos i + \bar{k}_a \sin i \\ \bar{k}_2 = \bar{k}_2 \end{array}$$

- 1º) $\bar{k}_a = \bar{l}_2 d - \bar{l}_2 c + \bar{k}_2 f$ Del Triedro (A) al (2)
 2º) Si $\gamma = i = 90^\circ$ " " (3) al (2) $\bar{k}_a = \bar{k}_3 = \bar{l}_2 \cos \alpha + \bar{k}_2 \sin \alpha$
 3º) Si $\alpha = 90^\circ$ " " (A) al (3) $\bar{k}_a = \bar{l}_3 \cos i \cos \gamma + \bar{l}_3 \cos i \sin \gamma + \bar{k}_3 \sin i$
 4º) Si $\gamma = i = \alpha = 90^\circ$ " " (A) al (A) $\bar{k}_a = \bar{k}_a$

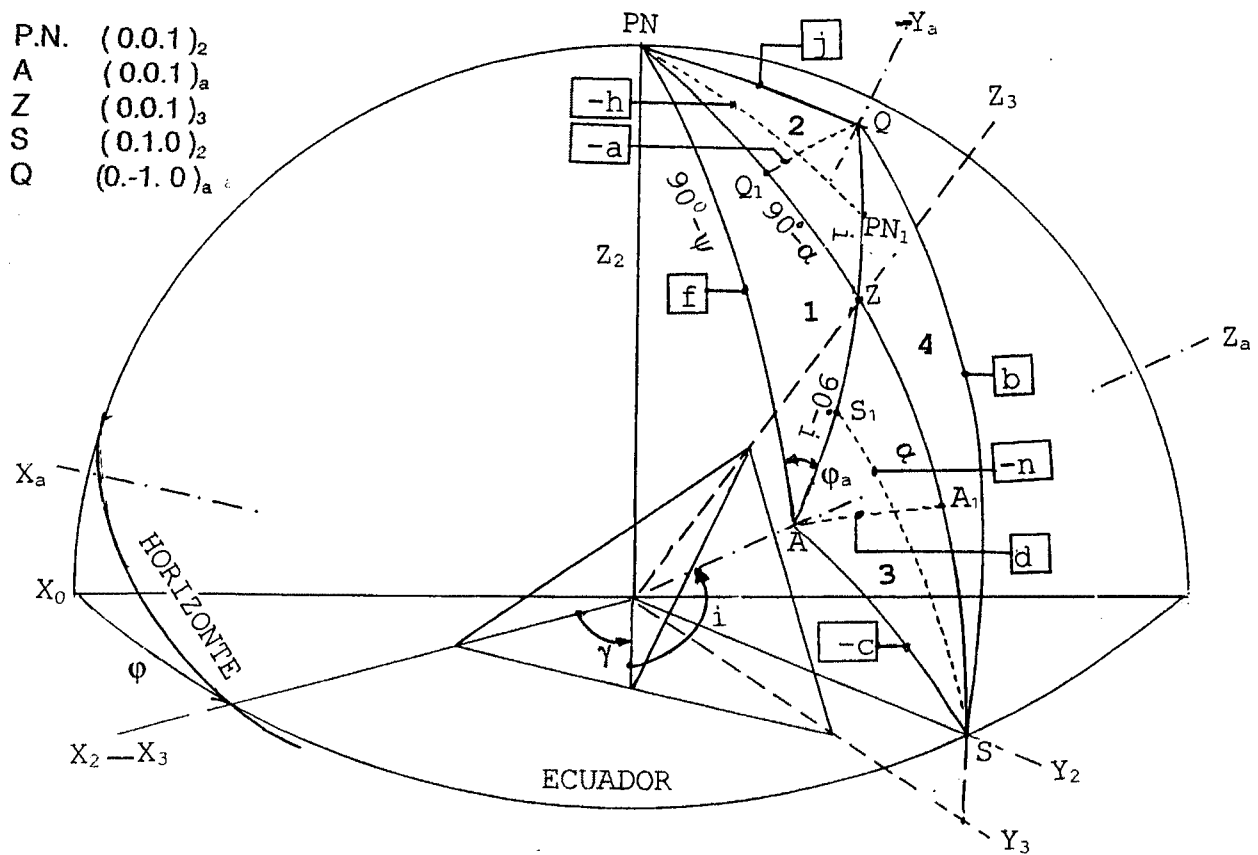


Fig. (B-1) Cuadrilátero K sobre la Esfera Celeste

CAPITULO III

C) BASE DEL RELOJ

En el Capítulo I, se ha definido el plano base como el $Z_a = 0$, mediante el versor $(A-H)$ cuya ecuación en los Triedros (A), (B) y (2) es :respectivamente Fig. (C - 1)

$$(C.1) \quad (\overline{A-H})_b = (\overline{A-H})_a = \overline{k}_b = \overline{k}_a \quad \text{y} \quad (C.2) \quad (\overline{A-H})_2 = \overline{i}_2 d - \overline{j}_2 c + \overline{k}_2 f$$

D) ESTILO

El Estilo es un versor situado en cualquier Triedro de un punto geográfico H con origen H y extremo P_o por donde pasa el "Rayo Solar", que incide sobre el Plano Base, en el punto P y dado por la ecuación :

$$(D.1) \quad (\overline{P_o-H}) = \overline{i} P_x + \overline{j} P_y + \overline{k} P_z$$

También se expresa en los Triedros (A) y (B) a través de los ángulos ϕ (el definido por el eje $Y_a H$ y la subestilar $Y_b H$) y el ángulo ψ (elevación del estilo). Fig. (D - 1)

-Cálculo de los ángulos ϕ . y ψ

Proyectando el vector $\overline{k}_a \wedge (\overline{P_o-H})_a$ normal a la Subestilar, sobre los ejes $X_a H$ e $Y_a H$ del Triedro (A) ,y hallando su cociente se llega al siguiente ecuación.

$$(D.2) \quad \text{tg} \phi = \frac{(\overline{A-H})_a \wedge (\overline{P_o-H})_a \cdot \overline{x}_{1a}}{(\overline{A-H})_a \wedge (\overline{P_o-H})_a \cdot \overline{x}_{2a}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ P_{xa} & P_{ya} & P_{za} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ P_{xa} & P_{ya} & P_{za} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = - \frac{P_{xa}}{P_{ya}}$$

A) Estilo paralelo al Eje Terrestre (Versor $\overline{k}_2$ ó $-\overline{k}_2$)

- A₁) Triedro (A)

Conviene destacar que el Estilo tiene dos sentidos en la misma dirección, definidos por los versores $\overline{k}_2$ y $-\overline{k}_2$ respectivamente marcando el Norte. y Sur y cuyas ecuaciones vectoriales son: Fig.(D- 2)

$$(B.4.1) \quad (\overline{P_0-H})_a = \overline{k}_2 = -\overline{i}_a h - \overline{j}_a j + \overline{k}_a f \quad \text{y} \quad (B.4.1.1) \quad (\overline{P_0-H})_a = -\overline{k}_2 = \overline{i}_a h + \overline{j}_a j - \overline{k}_a f$$

El punto P_0 debe estar situada sobre el Plano Base , para lo cual, según las fórmulas anteriores, si $P_{za} = f > 0$ P_0 se halla sobre $\overline{k}_2$ y si $P_{za} = f < 0$ debe situarse sobre $-\overline{k}_2$. En el caso que $f=0$, según (C.2) el Plano Base es paralelo al Eje Terrestre, y se resolverá mediante un artificio.(Caso del Reloj Polar). Se deduce además que

$$(B.4.10) \quad \text{sen} \psi = f$$

El valor del ángulo $\phi = \phi_a$ define el correspondiente entre la máxima pendiente del plano (A) (eje $Y_a H$) y la subestilar (eje $Y_b H$), donde (D. 2.1) $\text{tg} \phi_a = -h/j$

- A₂) Triedro (B)

Determinación del Estilo

Las ecuaciones del Estilo se hallan, proyectando los versores del Triedro (A), dados por las fórmulas (B.4.1) y (B.4.1.1) sobre el Triedro (B), según el siguiente cambio de ejes :

$$(D.4) \quad \begin{aligned} \overline{i}_a &= \overline{i}_b \cos \phi - \overline{j}_b \text{sen} \phi \\ \overline{j}_a &= \overline{i}_b \text{sen} \phi + \overline{j}_b \cos \phi \\ \overline{k}_a &= \overline{k}_b \end{aligned} \quad \text{es decir:}$$

$$(D.1.2.1) \quad (\overline{P_0-H})_b = \overline{k}_2 = -\overline{i}_b (j \text{sen} \phi + h \cos \phi) + \overline{j}_b (h \text{sen} \phi - j \cos \phi) + \overline{k}_b f \quad (\text{con } f > 0)$$

$$(D.1.2.2) \quad (\overline{P_0-H})_b = -\overline{k}_2 = \overline{i}_b (j \text{sen} \phi + h \cos \phi) - \overline{j}_b (h \text{sen} \phi - j \cos \phi) - \overline{k}_b f \quad (\text{con } f < 0)$$

La aplicación de (D.2) es inmediata. Si $\phi = \phi_a$ el Triedro pasa a ser el (B_a) donde el eje $Y_b H$, ahora la subestilar, y el de simetría del reloj. „Por último, las fórmulas del Estilo se transforman en las siguientes, teniendo en cuenta la igualdad (B.5) $h^2 + j^2 + f^2 = 1$

$$(D.1.3.1) \quad (\overline{P_0-H})_b = -\overline{i}_b (1-f^2)^{1/2} + \overline{k}_b f \quad (\text{con } f > 0)$$

$$(D.1.3.2) \quad (\overline{P_0-H})_b = \overline{i}_b (1-f^2)^{1/2} - \overline{k}_b f \quad (\text{con } f < 0)$$

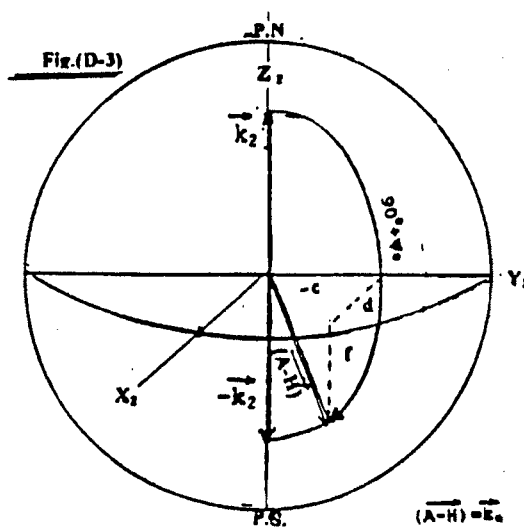
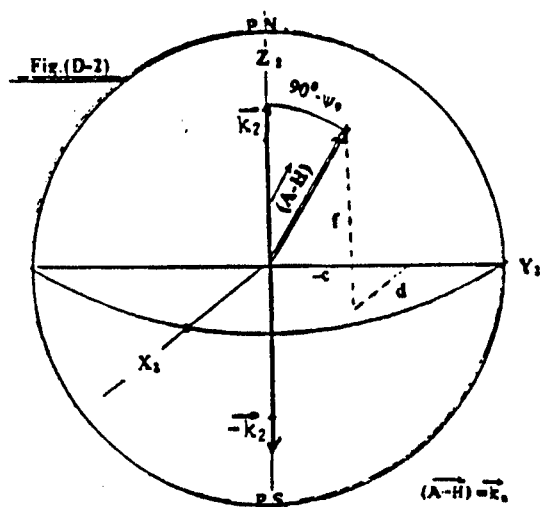
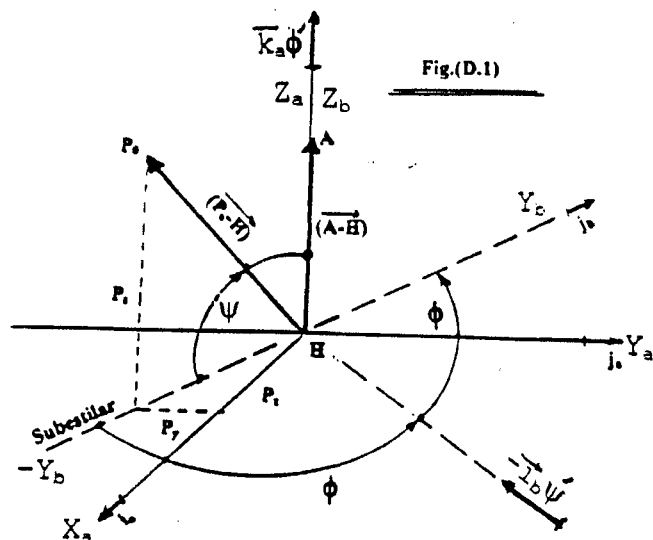
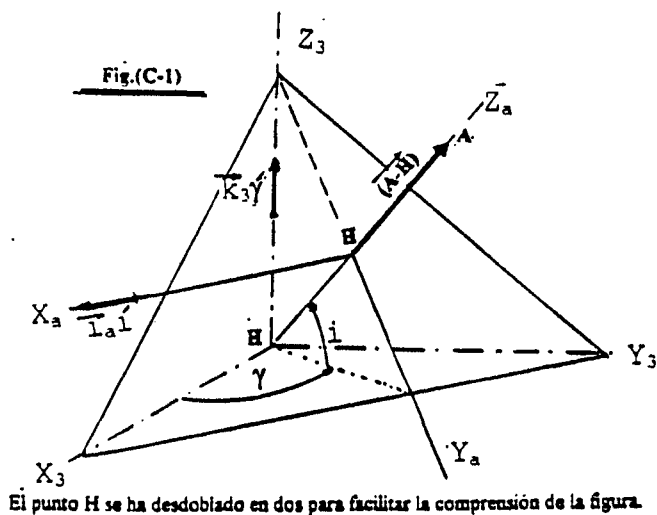
Como en el caso anterior si $f = 0$ se resuelve mediante un artificio.

- B) Estilo normal al Plano Base

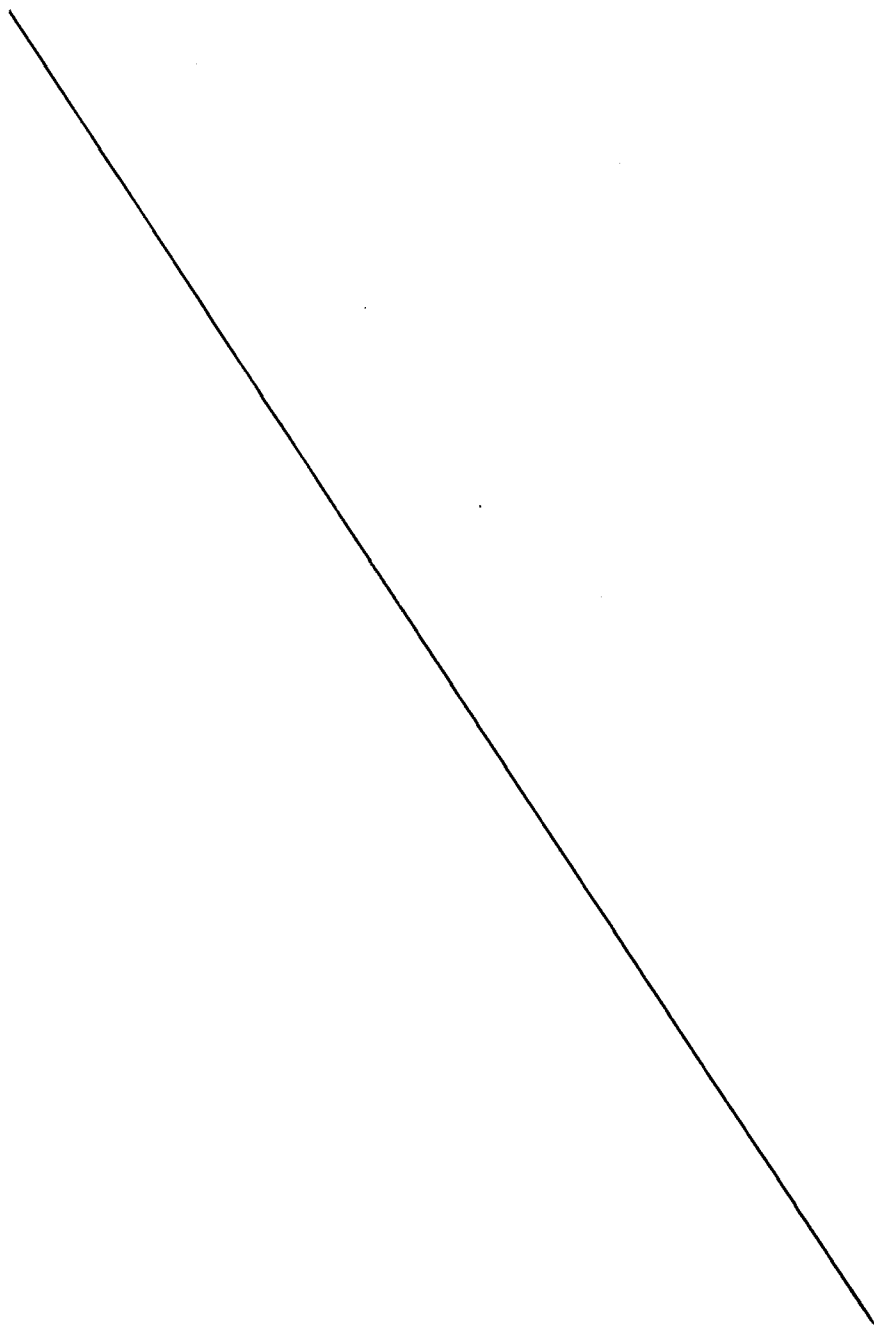
Su ecuación en los Triedros (A), (B) y (2) es, respectivamente:

$$(D.1.4.1) \quad (\overline{P_0-H})_a = (\overline{P_0-H})_b = \overline{k}_a = \overline{k}_b \quad \text{y} \quad (D.1.4.2) \quad (\overline{P_0-H})_2 = (\overline{A-H})_2 = \overline{i}_2 d - \overline{j}_2 c + \overline{k}_2 f$$

FIGURAS



Las figuras (D-2) y (D-3) indican la representación del versor del Plano(A) sobre la Esfera Terrestre.



CAPITULO IV

E) VECTOR HORARIO

El Rayo Solar pasando por el punto P_0 cabeza del Estilo, incide sobre el Plano Base (A), en el punto P. Se define como "Vector Horario" el generado por este último y con origen el centro de los Triedros. Su fórmula general vectorial queda expresada en el Triedro (B) del que se derivan los restantes.: Fig.(E-1) Si se desea pasar al Triedro (A), debe verificarse que el ángulo $\phi = 0$, si al (3), que $i=\gamma=90^\circ$ y si al (2) que $\alpha=i=\gamma=90^\circ$

$$(E.1) \quad (\overline{P-H})_b = (\overline{P_0-H})_b + (\overline{P-P_0})_b$$

Del segundo miembro se conocen:

-1º) El Estilo estudiado en el capítulo III

$$(D.1) \text{ ó } (E.2) \quad (\overline{P_0-H})_b = \overline{i}_b P_{xb} + \overline{j}_b P_{yb} + \overline{k}_b P_{zb}$$

-2º) El vector $(\overline{P-P_0})_b$ sobre el soporte del "Rayo Solar" (Capítulo II)

$$(E.3) \quad (\overline{P-P_0})_b = -\overline{ir} = \overline{i}_b r U_b + \overline{j}_b r V_b + \overline{k}_b r W_b$$

Con estos valores, la ecuación (E.1) pasa a ser la

$$(E.1.1) \quad (\overline{P-H})_b = (\overline{P_0-H})_b + (\overline{P-P_0})_b = \overline{i}_b (P_{xb} + r U_b) + \overline{j}_b (P_{yb} + r V_b) + \overline{k}_b (P_{zb} + r W_b)$$

Por definición, el punto P debe encontrarse sobre el Plano Base, luego se debe cumplir que su componente sobre el plano $Z_b=0$ sea nula

$$(E.4) \quad P_{zb} + r W_b = 0. \quad \text{Y eliminando "r" con (E.1.1), se llega a:}$$

$$(E.1.2) \quad (\overline{P-H})_b = \overline{i}_b (P_{xb} + P_{zb} U_b / -W_b) + \overline{j}_b (P_{yb} + P_{zb} V_b / -W_b)$$

Por último, sustituyendo los componentes del Rayo Solar por sus valores, dados en las fórmulas (B.1.1), se obtiene finalmente la ecuación general del "Vector Horario" que es el elemento fundamental de la Gnomónica Vectorial

$$(E.5) \quad (\overline{P-H})_b = \overline{i}_b \frac{A_b \operatorname{sen} \varphi + B_b \cos \varphi + H \operatorname{tg} \delta}{c \operatorname{sen} \varphi + d \cos \varphi + f \operatorname{tg} \delta} + \overline{j}_b \frac{M_b \operatorname{sen} \varphi + N_b \cos \varphi + J \operatorname{tg} \delta}{c \operatorname{sen} \varphi + d \cos \varphi + f \operatorname{tg} \delta}$$

y donde sus "Coeficientes del Vector Horario", (de modo abreviado "c.v.h"), son:

$$\begin{aligned}
 A_b &= (-b\sin\phi + n\cos\phi)P_{zb} + cP_{xb} \\
 B_b &= (a\sin\phi - m\cos\phi)P_{zb} + dP_{xb} \\
 (E.6) \quad M_b &= (-n\sin\phi - b\cos\phi)P_{zb} + cP_{yb} \\
 N_b &= (m\sin\phi + a\cos\phi)P_{zb} + dP_{yb} \\
 H_b &= (j\sin\phi + h\cos\phi)P_{zb} + fP_{yb} \\
 J_b &= (-h\sin\phi + j\cos\phi)P_{zb} + fP_{yb}
 \end{aligned}$$

que a su vez son función de :

- a) El ángulo ϕ
- b) Los "c.t.p"
- c) Los componentes correspondientes a cada Estilo

Desarrollando estos coeficientes en los Triedros (A) y (B), se tiene :

-1º) Triedro (B)

Se estudia solamente el caso del Triedro (B_0) (con $\phi = \phi_a$)

(E.6.1)	(E.6.2)	(E.6.4)
$A_{b0} = -dP_{zb} / (1-f^2)^{1/2} + cP_{xb}$	$-fd / (1-f^2)^{1/2}$	$-d / (1-f^2)^{1/2}$
$B_{b0} = cP_{zb} / (1-f^2)^{1/2} + dP_{xb}$	$fc / (1-f^2)^{1/2}$	$c / (1-f^2)^{1/2}$
$M_{b0} = -cP_{zb} / (1-f^2)^{1/2} + cP_{yb}$	$-c / (1-f^2)^{1/2}$	$-fc / (1-f^2)^{1/2}$
$N_{b0} = -dP_{zb} / (1-f^2)^{1/2} + dP_{yb}$	$-d / (1-f^2)^{1/2}$	$-fd / (1-f^2)^{1/2}$
$H_{b0} = fP_{xb}$	0	0
$J_{b0} = P_{zb}(1-f^2)^{1/2} + fP_{yb}$	0	$(1-f^2)^{1/2}$

donde las notaciones numéricas definen:

(E.6.1).....Coeficientes en el Triedro (B_0) en función de P_{xb}, P_{yb}, P_{zb} .

(E.6.2).....Idm con Estilo paralelo al Eje Terrestre $\bar{k}_2$

(E.6.3) Idm " " " " " " " " - $\bar{k}_2$ cambia el signo de $(1-f^2)^{1/2}$

(E.6.4).....Idm " " normal al Plano Base

-2º) Triedro (A)

Es, salvo excepciones, el Triedro normal para el cálculo de planos base y relojes. Sus coeficientes son:

(E.6.5)	(E.6.6)	(E.6.8)
$A_a = nP_{za} + cP_{xa}$	a	n
$B_a = -mP_{za} + dP_{xa}$	b	-m
$M_a = -bP_{za} + cP_{ya}$	m	-b
$N_a = aP_{za} + dP_{ya}$	n	a
$H_a = hP_{za} + fP_{xa}$	0	h
$J_a = jP_{za} + fP_{ya}$	0	j

donde:

(E.6.5).....Coeficientes en el Triedro (A) en función de P_{xa}, P_{ya} y P_{za} .

(E.6.6).....Idm con Estilo Paralelo al Eje Terrestre $\bar{k}_2$ ($f > 0$) Función de los "c.t.p"

(E.6.7.) " " " " " " " " - $\bar{k}_2$ ($f < 0$) cambian los signos de los "c.v.h" y por tanto los "c.t.p" a,b,m,n,h,j

(E.6.8).... Estilo normal al Plano Base. ($P_{za}=1$). Función de los "c.t.p"

Si $f < 0$ y el Estilo es paralelo al Eje Terrestre ($\overline{k_2}$), es el caso de los relojes verticales en el Hemisferio Norte.; cambian el signo los "c.t.p" excepto los c, d, f en el Triedro (A) y el $(1-f^2)^{1/2}$ en el (B₀).

Partiendo del "Vector Horario", se deducen las Líneas de Insolación Diurna y el Haz Horario al eliminar ó el "Angulo Horario" φ , ó la "Declinación Solar" δ , resolviendo el " V. H " como ecuación paramétrica

$$(\overline{P-O}) = \overline{TF_1(\varphi, \delta)} + \overline{jF_2(\varphi, \delta)} \text{ donde } X = F_1(\varphi, \delta) \text{ e } Y = F_2(\varphi, \delta)$$

-1º). Líneas de Insolación Diurna.

Es el lugar geométrico descrito por el punto P al variar el ángulo horario φ . Función de δ , los "c.t.p" y las variables X e Y ; La ecuación general es : Figs (E-2), (E-3) y (E-4)

$$(E.7) \quad \begin{aligned} & (x(-cJ_b + fM_b) + y(-fA_b + cH_b) + (-M_bH_b + A_bJ_b))^2 \operatorname{tg}^2 \delta + \\ & (x(-dJ_b + fN_b) + y(-fB_b + dH_b) + (-N_bH_b + B_bJ_b))^2 \operatorname{tg}^2 \delta - \\ & (x(cN_b - dM_b) + y(dA_b - cB_b) + (B_bM_b - A_bN_b))^2 = 0 \end{aligned}$$

El espacio correspondiente al punto P, está limitado por las Líneas de Insolación correspondientes a la Declinación Solar $\pm 23^\circ 27'$. Existen otras dos limitaciones, estudiadas posteriormente; la primera en el caso de que el "Rayo Solar" no incida sobre el plano del reloj y la segunda cuando P se halle por encima de la cabeza del Estilo P₀.

La fórmula anterior en el Triedro (A), basándose en las (E.5) (E.6) etc y (B.5), (B.6) y (B.7) del Capítulo II y en función de los componentes del Estilo, es;

$$(E.7.1) \quad (mx - ay - mP_{xa} + aP_{ya} - dP_{za})^2 \operatorname{tg}^2 \delta + (nx - by - nP_{xa} + bP_{ya} + cP_{za})^2 \operatorname{tg}^2 \delta = (hx + jy - hP_{xa} - jP_{ya} + fP_{za})^2$$

Cónicas de las "Líneas de Insolación"

El tipo de cónicas correspondientes a las "Líneas de Insolación Diurna" ; son independientes del Triedro de referencia y por Geometría Analítica se demuestra, que los coeficientes de las variables de 2º grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ cumplen con la condición

$$(E.8) \quad B^2 - 4AC \begin{cases} \leq 0 & \text{Elipse} \\ = 0 & \text{Parábola} \\ > 0 & \text{Hipérbola.} \end{cases}$$

Aplicando este teorema a la (E.7.1.2) ó a la fórmula general (E.7) , se llega a las relaciones siguientes:

$$(E.8.1) \quad \cos^2 \delta \begin{cases} \leq f^2 & \text{Elipse} \\ = f^2 & \text{Parábola} \\ > f^2 & \text{Hipérbola} \end{cases}$$

El "c.t.p" f determina, con la "Declinación Solar" δ , el tipo de cónica correspondiente a las "Líneas de Insolación Diurna".

Ejemplos de Cónicas de Insolación

Triedro (A) Estilo paralelo al Eje T. con $f < 0$ ($\overline{k_2}$)

$$(E.7.1.1) \quad (h^2 - \operatorname{sen}^2 \delta) x^2 + (j^2 - \operatorname{sen}^2 \delta) y^2 + 2hjxy - 2h \cos^2 \delta x - 2j \cos^2 \delta y + \cos^2 \delta = 0$$

Triedro (A) Estilo normal al Plano (A).

$$(E.7.1.2) \quad (h^2 - \operatorname{sen}^2 \delta) x^2 + (j^2 - \operatorname{sen}^2 \delta) y^2 + 2hjxy + 2hfx + 2jfy + f^2 - \operatorname{sen}^2 \delta = 0$$

Triedro (B₀) Estilo paralelo al Eje T.

$$(E.7.1.3) \quad \text{sen}^2\delta x^2 + (f^2 - \cos^2\delta) y^2 - 2(1-f^2)^{1/2} \cos^2\delta y - \cos^2\delta = 0$$

Triedro (B₀) Estilo normal al Plano (A).

$$(E.7.1.4) \quad \text{sen}^2\delta x^2 + (f^2 - \cos^2\delta) y^2 - 2(1-f^2)^{1/2} f y - f^2 + \text{sen}^2\delta = 0$$

Triedro (B₀) Reloj Polar. Estilo normal al Plano (A)

$$(E.7.1.5) \quad \text{tg}^2\delta x_b^2 - y_b^2 + \text{tg}^2\delta = 0$$

En el reloj Polar, (f=0), en las líneas de insolación, según (E.8.1), $\cos^2\delta > 0$. Son hipérbolas.

Se recuerda que el centro de las cónicas está dado por las ecuaciones siguientes:

$$(E.9) \quad f'(x) = 0 \quad y \quad f'(y) = 0$$

Recta Equinocial

Si $\delta=0$, en todas las expresiones anteriores, como por ejemplo el nuevo "Vector Horario" y su expresión algebraica, dadas a continuación

$$(E.5.1) \quad (\overline{P-H})_b = \overline{I}_b \frac{A_b \text{tg}\phi + B_b}{\text{ctg}\phi + d} + \overline{J}_b \frac{M_b \text{tg}\phi + N}{\text{ctg}\phi + d}$$

$$(E.7.2) \quad (cN_b - dM_b)x + (dA_b - cB_b)y + (B_bM_b - A_bN_b) = 0 \quad \text{que en el Triedro (A) resulta:}$$

$$(E.7.2.1) \quad (hx + jy - hP_{xa} - jP_{ya} + fP_{za}) = 0$$

y en función de cada Estilo y Triedro y teniendo en cuenta las ya citadas relaciones entre los "c.t.p" estudiados en el Capítulo II, se llega a:

$$(E.7.2.2) \quad y = -1 / (1-f^2)^{-1/2} \quad \text{Con Estilo paralelo al Eje T. Tried. (B}_0\text{)}$$

$$(E.7.2.3) \quad y = -f / (1-f^2)^{-1/2} \quad \text{" " " normal al Plano (A) Tried. (B}_0\text{)}$$

$$(E.7.2.4) \quad hx + jy + 1 = 0 \quad \text{Con Estilo paralelo al Eje T. } \overline{k}_2 \text{ (f > 0) Tried. (A)}$$

$$(E.7.2.5) \quad hx + jy + f = 0 \quad \text{" " " normal al Plano (A). Tried. (A)}$$

Si el coeficiente angular de la recta equinoccial $\text{tg } \phi = -h/j < 0$, el plano está orientado al Este ($\gamma > 90^\circ$) y los (c.t.p) h y j tienen el mismo signo; y si $\text{tg } \phi = -h/j > 0$, la orientación es hacia el Oeste ($\gamma < 90^\circ$), y los "c.t.p" h y j tienen distinto signo.

-2º) Haz Horario

El lugar geométrico descrito por el punto P, al variar la Declinación Solar δ , está formado por un haz de rectas, o "Haz Horario", con vértice en el punto H₀ (Polo del Haz), que es función de ϕ y de los "c.v.h", y las variables X e Y. Su ecuación general. Fig. (E-2)

$$(E.10) \quad y_b = x_b \frac{fR_b - J_b T}{fS_b - H_b T} + \frac{C_b}{fS_b - H_b T} \quad \text{donde:}$$

$$(E.10.0.1) \quad R_b = (M_b \sin \varphi + N_b \cos \varphi) \quad (E.10.0.3) \quad T = (c \sin \varphi + d \cos \varphi)$$

$$(E.10.0.2) \quad S_b = (A_b \sin \varphi + B_b \cos \varphi) \quad (E.10.0.4) \quad C_b = (A_b J_b - M_b H_b) \sin \varphi + (B_b J_b - N_b H_b) \cos \varphi$$

El punto H_0 se halla resolviendo las ecuaciones resultantes de igualar a cero los coeficientes de $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$ en (E.10). En el Triedro (A) y Estilo Normal al Plano. Base se tiene:

Ejemplos en el Triedro (A)

Estilo normal al Plano Base

$$R_a = -b \sin \varphi + a \cos \varphi; \quad S_a = n \sin \varphi - m \cos \varphi; \quad C_a = -d \sin \varphi + c \cos \varphi; \quad T = c \sin \varphi + d \cos \varphi$$

resultando el Haz siguiente,

$$(E.10.1) \quad (m \operatorname{tg} \varphi + n) x - (a \operatorname{tg} \varphi + b) y - d \operatorname{tg} \varphi + c = 0; \quad \text{Punto } H_0 \quad (h/f, j/f)$$

Estilo paralelo al Eje T.

$$(E.10.2) \quad (m \operatorname{tg} \varphi + n) x - (a \operatorname{tg} \varphi + b) y = 0; \quad \text{Punto } H_0 \quad (0, 0)$$

coincidente con las rectas base del "Vector Horario" e independiente de la Declinación Solar δ

Si $f=0$, Caso del Reloj Polar.

La ecuación del "Haz Horario" toma la forma:

$$(E.10.3) \quad y = \frac{J_b}{H_b} x - \frac{C_b}{H_b T}$$

es decir, las líneas de este Haz, son paralelas y el término independiente es función de φ . Fig (E.4)

Estilo Normal al Plano en el Triedro(A), se tiene:

$$J_a = j; \quad H_a = h; \quad C_a = -d \sin \varphi + c \cos \varphi; \quad y \quad T = c \sin \varphi + d \cos \varphi. \text{ Por tanto}$$

$$(E.10.3.1) \quad y_a = \frac{j}{h} x_a - \frac{1}{h \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_h)} \quad \text{con } \operatorname{tg} \varphi_h = d/c$$

: Si además $H_b=0$, el Triedro (B), pasa a ser el (B_0) el "Haz Horario" tiene como ecuación

$$(E.10.4) \quad x = C_{b0}/T = 1/\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_h); \quad \text{donde } C_{b0} = -d \sin \varphi + c \cos \varphi, \quad J_{b0} = 1 \text{ y } \operatorname{tg} \varphi_h = d/c$$

siendo la subestilar el eje $Y_{b0} H$. Si este se desplaza por dicho eje una longitud HH_n , genera un plano de altura unidad y de modo similar el punto P, segmentos horarios paralelos al HH_n con límites entre las hipérbolas extremas de los puntos H y H_n . Fig.(E-4).

Línea del Horizonte

Es, por definición, la traza del Plano Base (A) con el paralelo al horizontal, pasando por el punto P_0 cabeza del Estilo. Para que exista iluminación, el "Rayo Solar" debe cumplir con dos condiciones; encontrarse sobre los planos (A), y horizontal del lugar geográfico H, siendo sus componentes sobre $\bar{k}_a$ y $\bar{k}_3$ negativas.

-1º) Sobre el Plano (A) en el Triedro (A), se verifica:

$$(E.13) \quad (\overline{P-H})_a \times \bar{k}_a < 0 \quad \text{ó}$$

$$(E.13.1) \quad W_a = -c \operatorname{sen} \varphi \cos \delta - d \cos \varphi \cos \delta - f \operatorname{sen} \delta < 0 \quad \text{según B (1.1) del Capítulo.}$$

-2º) En el Plano horizontal, en el Triedro (3), la componente del Estilo sobre el eje Z_3 , es decir, P_{z3} , viene definida por su proyección sobre dicho eje, (producto escalar) $(\overline{P_0-H})_a \times \bar{k}_3$.

De este modo, para que exista iluminación, la ordenada de la Línea del Horizonte y_{Ha} debe ser menor que la del "Vector Horario" y_a . Fig.(E-5) y (E-6), siendo:

$$(E.14) \quad y_{Ha} = -\frac{P_{z3}}{\cos i} = -\frac{(\overline{P_0-H})_a \times \bar{k}_3 \times \cos y}{\cos i \cos y} = \frac{dP_{ya} + aP_{za}}{d} = \frac{N_a}{d}$$

donde $\bar{k}_3 = -\bar{j}_a \cos i + \bar{k}_a \operatorname{sen} i$ (B.4.1) con $\alpha = 90^\circ$ Capítulo II; $(\overline{P_0-H})_a = \bar{i}_a P_{xa} + \bar{j}_a P_{ya} + \bar{k}_a P_{za}$ (D.1) Capítulo III; y $dP_{ya} + aP_{za} = N_a$ (E.6.5) Capítulo IV

Desarrollando la fórmula (E.14) en el Triedro (3) con el Estilo paralelo al Eje Terrestre. (con $N_a = n$ ó $N_a = a$ si el Estilo es normal al Plano Base) es decir, con los valores:

$$m = 1; n = 0; f = \operatorname{sen} \alpha; c = -\cos \alpha \quad \text{se llega a,}$$

$$- \operatorname{sen} \varphi$$

$$(E.14.1) \quad y_a = \frac{- \operatorname{sen} \varphi}{-\cos \alpha \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \delta} > n/d \quad \text{se llega, igual que mediante (E.13.1) a:}$$

$$(E.14.2) \quad \text{ó} \quad (E.13.2) \quad \operatorname{sen} \varphi > \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \delta$$

Existe reloj cuando se verifiquen las condiciones (E.13.1) y (E.14) ó (E.14.1)

Ecuación del Tiempo. Cálculo de la Lemniscata.

El tiempo medio t_{mk} es distinto del tiempo solar verdadero t_k debido a que los principios básicos de la Gnomónica no se atienen a las leyes de Kepler y su diferencia en cada instante, se conoce como la Ecuación del Tiempo.

$$(E.15) \quad t_{mk} - t_k = "Ec.Tp"$$

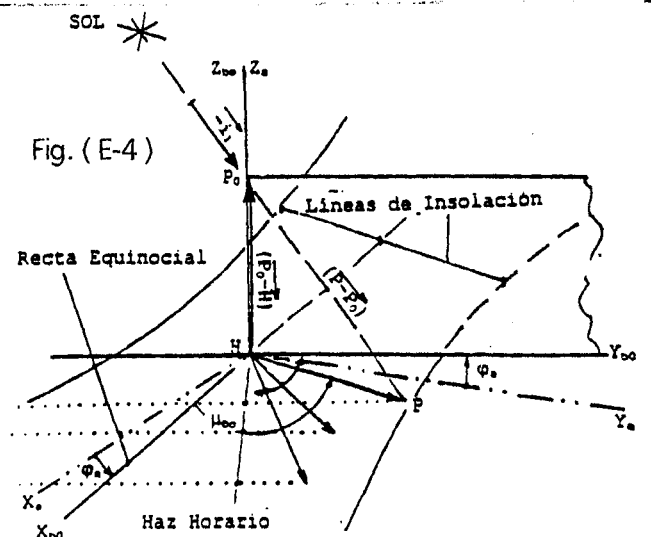
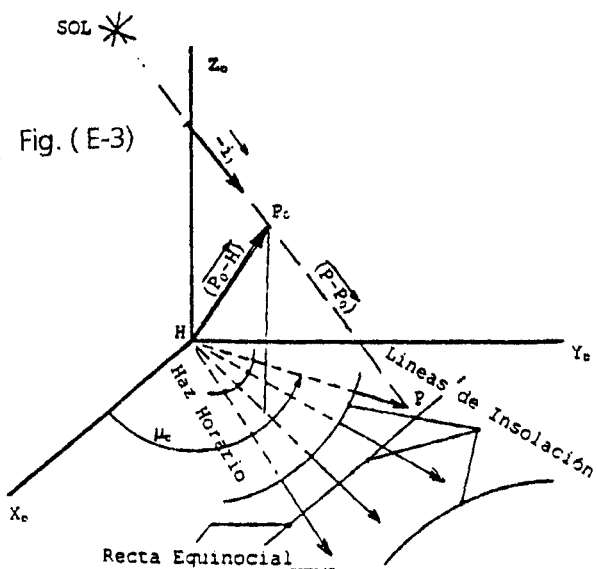
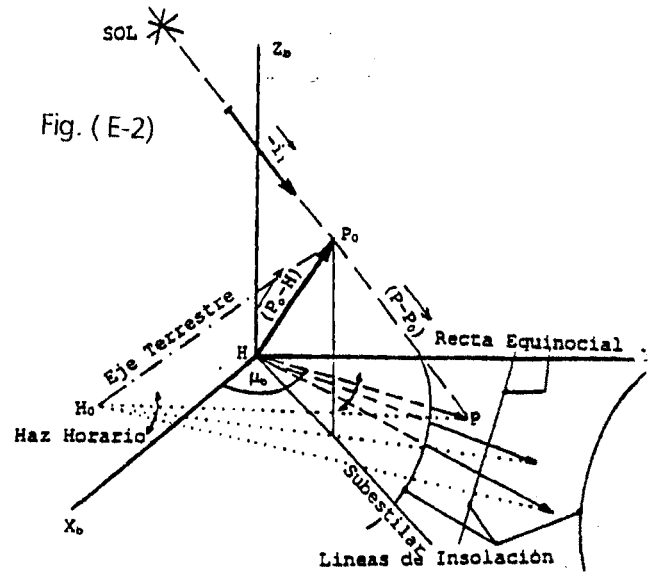
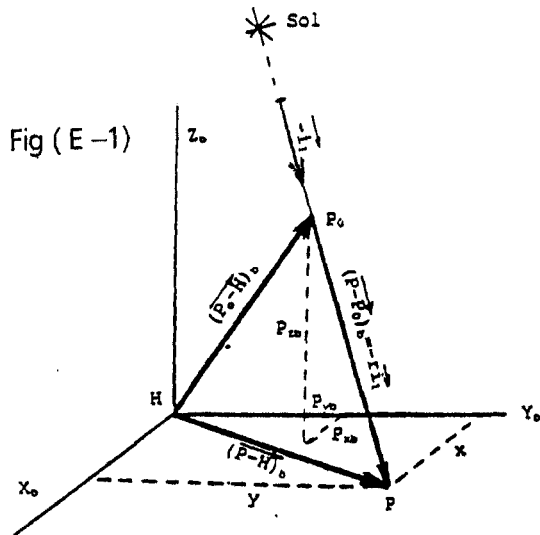
Estos valores se hallan publicados en cualquier tratado de Astronomía o Gnomónica. y su representación gráfica se indica en la Fig.(E-8) que es la suma de dos sinusoides: la denominada Ecuación de Centro y la Ecuación de la Inclinação de la Eclíptica. El "Angulo Horario Solar Verdadero" en función del Tiempo Medio, t_{mk} en horas, "Ec.Tp" en minutos y φ_{hk} grados, quedaría

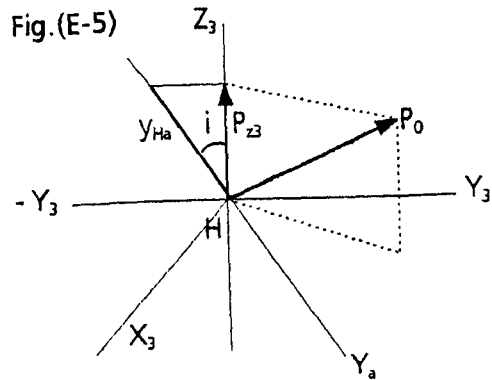
$$(E.15.1) \quad \varphi_h = 15 (t_{mk} - "Ec.Tp") + \varphi_{hk} + 90^\circ = 45 t_{mk} + \varphi_{hk} + 90^\circ - "Ec.Tp" / 4$$

En un reloj solar, si se calcula con las Horas del Tiempo Medio, el punto P, cabeza del "Vector Horario" en lugar de describir a una hora determinada durante un año, una recta del "Haz Horario," lo hace a través de una curva con forma de ocho llamada "Lemniscata" Fig.(E-7).

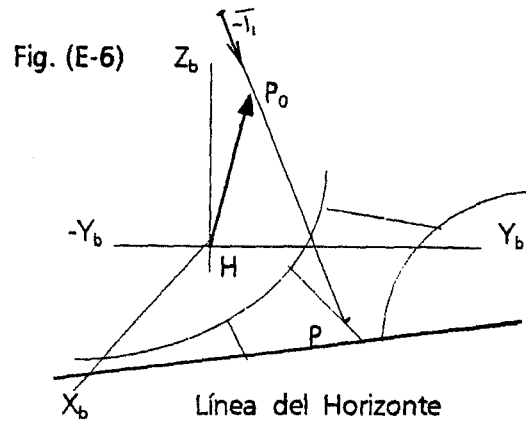
Su ecuación vectorial, queda definida por el "V.H" con el ángulo horario

$$(E.15.2) \quad \varphi_{mk} = 15 (t_k + "Ec.Tp") + \varphi_{hk} + 90 = 15t_k + \varphi_{hk} + Ec.Tp / 4$$

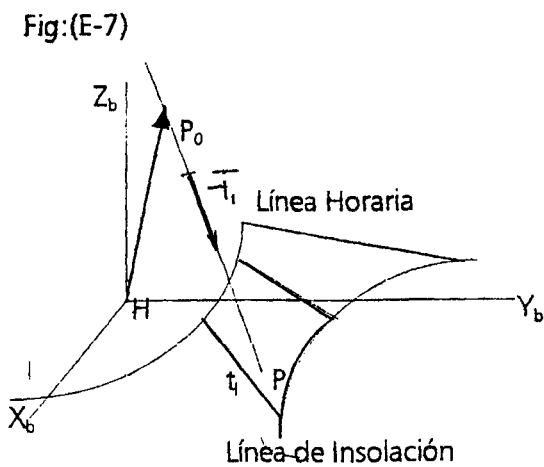




ordenada y_{Ha} Línea del Horizonte . Triedro (A)



Línea del Horizonte sobre el Triedro (B)



Lemniscata sobre la línea horaria t_1

Fig. (E-8)

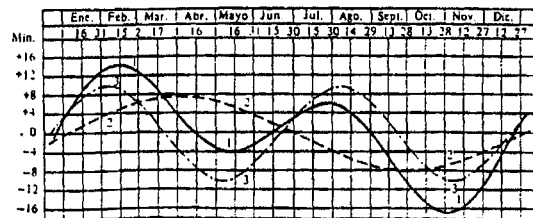


Gráfico 1. Ecuación del Tiempo
 "" 2. Ecuación del Centro
 "" 3. Ecuación inclinación Elíptica

Línea de la Ecuación del Tiempo

CAPITULO V

F) CODECLINACION E INCLINACION DE UN PLANO

(Mediante un reloj de sol, en oposición a otros métodos)

Dado un Plano (A) del que se desconocen su codeclinación (γ) e inclinación (i), ambas se pueden calcular al hacer coincidir la sombra de un Estilo normal al plano base, es decir, el "Vector Horario", con una dirección previamente elegida, en un día y hora dados.

Se seguirán dos procedimientos: el primero tomando el Angulo de la Hora con valores de $\mu_0 = 90^\circ$, 0° ó 180° según el parámetro que se calcule. Tiene la ventaja de su simplicidad, pero el inconveniente de disponer un solo momento al día en el caso de la codeclinación y uno ó dos en el de la inclinación; el segundo, mediante un proceso de cálculo mas complejo, puede aplicarse en cualquier momento .

A-1) Cálculo de la Codeclinación (Procedimiento 1º)

En el Triedro (A), se toma como Estilo el normal al plano base (A), que se encuentra sobre un plano auxiliar normal a este último, con traza el eje $Y_a H$, (que se puede definir como un cateto de cartabón girando sobre el otro que se halla sobre el eje $X_a H$), y cuya intersección con el (A) define el "Vector Horario" IFig (F-1). Su ecuación es:

$$(F.1.1) \quad (\overline{P-H})_a = \bar{k}_a P_z$$

Se anota la hora oficial t_0 cuando el "Vector Horario", es decir la aguja del reloj, coincida con el eje $Y_a H$ (con $\mu_0 = 90^\circ$ ó $(\overline{P-H})_a \times \bar{l}_a = 0$). siendo:

$$(F.3.1) \quad (\overline{P-H})_a \times \bar{l}_a = A \sin \varphi_0 + B \cos \varphi_0 + H \operatorname{tg} \delta = n \sin \varphi_0 - m \cos \varphi_0 + h \operatorname{tg} \delta = 0$$

donde $n = -\sin \alpha \cos \gamma$; $m = \sin \gamma$ $h = -\cos \alpha \cos \gamma$

y cuyo Angulo Horario está dado por

$$(F.2.1) \text{ ó } (E.15.1) \quad \varphi_0 = 15t_0 + \varphi_{hk} + 90^\circ - Ec \operatorname{Tp} / 4 - 15N$$

Con estos datos despejando $\operatorname{tg} \gamma$ ene. "Vector Horario" se llega a :

$$(F.4.1) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \alpha \sin \varphi_0 + \cos \alpha \operatorname{tg} \delta}{\cos \varphi_0} = \frac{f_0 \sin \varphi_0 - c_0 \operatorname{tg} \delta}{\cos \varphi_0}$$

(f_0 y c_0 son f y c con $i = 90^\circ$)

Consecuencia inmediata: La codeclinación de un plano es independiente de su inclinación.
Por tanto la codeclinación de una recta se halla como si fuera la traza de un plano horizontal.

tomando el tiempo oficial t_0 en el momento en que el "V.H" sea normal a la citada recta. y con el estilo situado sobre el plano vertical y traza el eje $Y_3 H$. Fig (F-2)

Al mismo resultado se llega, considerando el valor de μ_0 y el correspondiente φ_0 cuando el "V.H" es horizontal', es decir:

$$(E.11.2) \quad \operatorname{tg} \mu_0 = \frac{-b \operatorname{sen} \varphi_0 + a \cos \varphi_0 + j \operatorname{tg} \delta}{n \operatorname{sen} \varphi_0 - m \cos \varphi_0 + h \operatorname{tg} \delta} = \infty$$

A-2) Cálculo de la Inclinación (Procedimiento 1°)

Siguiendo un razonamiento similar al caso anterior, el plano auxiliar en este caso, se define el como el formado por un cartabón que gira sobre el otro, situado sobre el eje $Y_a H$. Fig (F-3), siendo su ecuación

$$(F.1.2) \quad (\overline{P-H})_a = \overline{I}_a P_z$$

Se anota la hora oficial t_0 cuando el "Vector Horario", es decir la aguja del reloj, coincida con el eje $X_a H$ (con $\mu_0 = 0^\circ$ ó $(\overline{P-H})_a \times \overline{I}_a = 0$), teniendo como resultado :

$$(F.3.2) \quad (\overline{P-H})_a \times \overline{I}_a = -b \operatorname{sen} \varphi_0 + a \cos \varphi_0 + j \operatorname{tg} \delta = 0$$

Multiplicando numerador y denominador por $\cos \gamma$ y teniendo en cuenta las ya citadas relaciones entre los "c.t.p" citadas en el Cap. I, la inclinación viene dada por:

$$(F.4.2) \quad \operatorname{tg} i = \frac{h \operatorname{sen} \varphi_0 - n \operatorname{tg} \delta}{m n \operatorname{sen} \varphi_0 + (1-m^2) \cos \varphi_0 + m h \operatorname{tg} \delta} \quad \text{donde al ser función de } \gamma \text{ es necesario.}$$

conocerla (por ejem. con la fórmula (F.5.1)).

Ejemplo:

Hallar la codeclinación e inclinación de un plano situado en un punto geográfico H de latitud $40^\circ 29' N$ y longitud $-3^\circ 52'$ el día 1-II-1998 Fig.(F-4)

DATOS:

Latitud N $\alpha = 40^\circ 29' = 40,483^\circ$ ($\operatorname{sen} \alpha = 0,6467$; $\cos \alpha = 0,7628$)

Declinación Solar $\delta = -17,074^\circ$; $\operatorname{tg} \delta = -0,3071$

Ecuación del Tiempo E.T. = $13,^m 35^s = 13,583^m$ E.T. / 4 = $3,396^\circ$.

Diferencia de longitudes $\varphi_{hg} = -3^\circ 52' = -3,87^\circ$

Estilo normal al Plano Base

1º) Cálculo de la codeclinación (γ)

Hora oficial del "Vector Horario" sobre el eje $Y_a H$ $t_0 = 12^h 11^m 10^s = 12,186^h$

Angulo Horario

$$(F.2.1.1) \quad \varphi_0 = 15 t_0 + \varphi_{hk} + 90^\circ - E.T./4 - 15^\circ = 250,524^\circ ; ; (\operatorname{sen} \varphi_0 = -0,9428 ; \cos \varphi_0 = -0,3334)$$

$$(F.4.1.1) \quad \operatorname{tg} \gamma = - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi_0 + \cos \alpha \operatorname{tg} \delta}{\cos \varphi_0} = -2,53 ; \text{ es decir } \gamma = 111,55^\circ$$

2º) Cálculo de la inclinación (i)

Hora oficial del "V.H" sobre el eje paralelo al $X_a H$, $t_g = 18^h 20^m 30^s = 18,341^h$

Angulo Horario

$$(F.2.2.2) \quad \varphi_0 = 15 t_g + \varphi_{hk} + 90^\circ - E.T./4 - 15^\circ = 342,8495^\circ$$

Valores de los "c.t.p" con $\alpha = 40^\circ 29'$; $\gamma = 111,55^\circ$; $m = 0,9301$; $n = 0,2385$; $h = 0,2794$.

$$(F.4.2.1) \quad \operatorname{tg} i = \frac{h \operatorname{sen} \varphi_0 - n \operatorname{tg} \delta}{m n \operatorname{sen} \varphi_0 + (1-m^2) \cos \varphi_0 + m h \operatorname{tg} \delta} = 0,5644 \quad e \quad i = 29,44^\circ$$

A-3.1) Cálculo de la Codeclinación de una recta o un plano. (Procedimiento 2º)

Se elige el Triedro (3) (por lo tanto los ángulos $i = \gamma = 90^\circ$ y los "c.t.p" $a = 0$; $b = -\operatorname{sen} \alpha = -f_0$; $m = 1$; $n = 0$; $h = 0$; $j = \cos \alpha = -c_0$ siendo el ángulo horario φ_0 y el Estilo, ambos similares a los casos ya estudiados. En el instante t_0 en el que el "Vector Horario" coincide con una recta auxiliar QH Fig. (F-5), dicha recta corresponde al "V. H" de un reloj horizontal, que forma el ángulo μ_0 con la dirección Este-Oeste y cuya ecuación es:

$$(F.5.1) \quad \operatorname{tg} \mu_0 = \frac{-b \operatorname{sen} \varphi_0 + a \cos \varphi_0 + j \operatorname{tg} \delta}{n \operatorname{sen} \varphi_0 - m \cos \varphi_0 + h \operatorname{tg} \delta} = - \frac{f_0 \operatorname{sen} \varphi_0 - c_0 \operatorname{tg} \delta}{\cos \varphi_0}$$

Esta fórmula es idéntica a la (F.4.1) cambiando γ por μ_0 , al coincidir ambos ángulos sobre el Plano Base $Z_3 = 0$, con el "Angulo Horario" correspondiente: e igual a las F(2.1) y F(2.2) y con distinto t_0 . De aquí se deduce:

-1º) La dirección Norte ó de la "Línea Meridiana", se halla a partir de la recta QH sumándole el ángulo $-(\mu_0 + 90^\circ)$

-2º) La codeclinación de una recta cualquiera RH ó la traza de un plano, que forme el ángulo v con la QH toma la expresión; $\gamma = \mu_0 + v + 90^\circ$. Fig. (F-5).

A-3.2) Cálculo de la Codeclinación en un plano vertical

Si el Plano Base fuese vertical, se verifica que $i = 0$ y en este caso se elegirá el Triedro (A). Como la codeclinación de una pared vertical no es correcta por construcción, se debe realizar el proceso de medición, sobre una lámina que posteriormente se sustituirá por la del reloj. El Estilo para verificar este proceso es similar, al de los casos anteriores y para la toma de datos, el cateto de un cartabón en condiciones similares a los casos anteriores y traza sobre el eje $Y_a H$, en el instante t_0 con el φ_0 correspondiente. Fig. (F-6)

El ángulo de la hora μ_0 viene dado por ::

$$(F.5.2) \quad \operatorname{tg} \mu_0 = \frac{-b \operatorname{sen} \varphi_0 + a \cos \varphi_0 + j \operatorname{tg} \delta}{n \operatorname{sen} \varphi_0 - m \cos \varphi_0 + h \operatorname{tg} \delta} = \frac{c_0 \operatorname{sen} \varphi_0 + f_0 \operatorname{tg} \delta}{-f_0 \cos \gamma \operatorname{sen} \varphi_0 - \operatorname{sen} \gamma \cos \varphi_0 + c_0 \cos \gamma \operatorname{tg} \delta}$$

Resolviendo la ecuación en $\operatorname{sen} \gamma$ y $\cos \gamma$, se tiene:

$$\begin{aligned} A_1 &= \operatorname{tg} \mu_0 \cos \varphi_0 \\ \text{con } B_1 &= \operatorname{tg} \mu_0 (f_0 \operatorname{sen} \varphi_0 - c_0 \operatorname{tg} \delta) \\ C_1 &= c_0 \operatorname{sen} \varphi_0 + f_0 \operatorname{tg} \delta \end{aligned}$$

$$(F.6.2) \quad A_1 \operatorname{sen} i + B_1 \cos i + C_1 = 0 \quad \text{ó} \quad \cos i = \frac{-B_1 C_1 + A_1 (A_1^2 + B_1^2 - C_1^2)^{1/2}}{A_1^2 + B_1^2}$$

Discusión

-1º) Si $\mu_0 = 0^\circ$; (F.6.1.1) $C_1 = 0$; y en consecuencia $\operatorname{sen} \varphi_0 = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \delta$; Esta fórmula se estudiará mas adelante (Hora del Orto y Ocaso)

$$\begin{aligned} -2^\circ) \text{ Si } \mu_0 = 90^\circ \text{ (F.6.1.2) } \operatorname{tg} \gamma &= -A/B = -\frac{f_0 \operatorname{sen} \varphi_0 - c_0 \operatorname{tg} \delta}{\cos \varphi_0} \end{aligned}$$

A-4) Cálculo de la Inclinación de un plano

Conocida la codeclinación " γ " por cualquiera de los métodos anteriores, la Inclinación se deduce al despejar en la ecuación (F.5) el parámetro " i " siguiendo el mismo sistema aplicado en los casos anteriores para la toma de datos. Fig. (F-7). El ángulo μ_0 está dado por:

$$(F.5) \quad \operatorname{tg} \mu_0 = \frac{-b \operatorname{sen} \varphi_0 + a \cos \varphi_0 + j \operatorname{tg} \delta}{n \operatorname{sen} \varphi_0 - m \cos \varphi_0 + h \operatorname{tg} \delta}$$

Para facilitar el cálculo se desarrollan los "c.t.p" en función de $\operatorname{sen} i$, $\cos i$, f_0 y c_0 y se tiene:

$$(F.6.2) \quad A_2 \operatorname{sen} i + B_2 \cos i + C_2 = 0 \quad \text{ó} \quad \cos i = \frac{-B_2 C_2 + A_2 (A_2^2 + B_2^2 - C_2^2)^{1/2}}{A_2^2 + B_2^2}$$

$$\text{Donde } \left\{ \begin{aligned} A_2 &= f_0 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \varphi_0 - \cos \gamma \cos \varphi_0 - c_0 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{tg} \delta \\ B_2 &= c_0 \operatorname{sen} \varphi_0 + f_0 \operatorname{tg} \delta \\ C_2 &= (f_0 \cos \gamma \operatorname{sen} \varphi_0 + \operatorname{sen} \gamma \cos \varphi_0 - c_0 \cos \gamma \operatorname{tg} \delta) \operatorname{tg} \mu_a \end{aligned} \right.$$

Discusión

-1º) Si $\mu_0 = 0^\circ$ $\operatorname{tg} i = -B_2/A_2$ que es la misma que la (F.4.2.1) dividiendo el numerador y denominador por $\cos \gamma$.

Con $i = 0^\circ$; $\operatorname{sen} \varphi_0 = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \delta$;

Y si $i = 90^\circ$ se halla la fórmula de la declinación de la normal a la recta QH, inversa de la (F.4.1)

$$(F.6.2.1) \quad ; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos \varphi_0}{f_0 \operatorname{sen} \varphi_0 - c_0 \operatorname{tg} \delta}$$

-2º) Si $\mu_0 = 90^\circ$, y $i = 90^\circ$ el plano base es horizontal y $C_2 = 0$: se llega a la fórmula (F.4.1)

Con $i = 0^\circ$ se llega al punto estudiado en A-3.2

NOTA. - Tiempo Solar Medio $t_M = \text{Tiempo Solar Verdadero} + E_c T_p = t_h + E_c T_p$
 - Tiempo Universal $t_u = t_g + \lambda_H/15$ ($\lambda_H/15$, huso horario en horas enteras)
 - Tiempo Oficial $t_o = t_u + N$ (N con valor 1 en invierno ó 2 en verano)
 - Tiempo Solar Verdadero en el p.g. H, en función de la hora de Greenwich t_g

Fig.(F-1),



Fig. (F-2)



Fig. (F -3) .

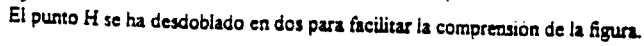


Fig. (F-4)



Fig.(F -5)

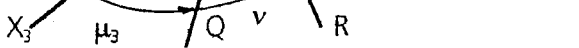
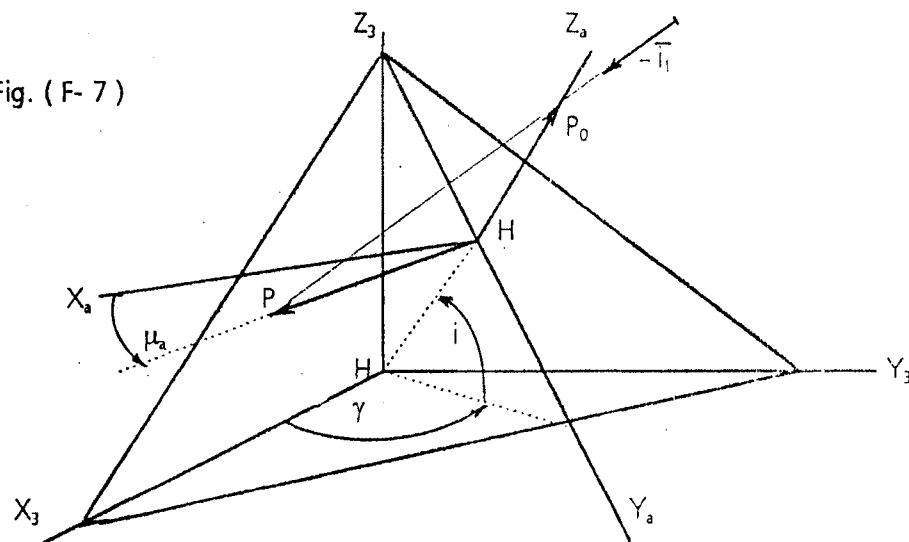


Fig. (F- 6)



Fig. (F- 7)



CAPITULO VI

G) RELOJ BIFILAR

Este reloj queda definido por la intersección del Rayo Solar $\vec{r}_1$ que se apoya en las rectas normales entre si Q ($y_b = 0, z_b = N_0$) y R ($x_b = 0, z_b = M_0$) y corta al Plano Base (B) en el punto P cabeza del "Vector Horario"; dicha ecuación se calcula del modo siguiente: La base del "Rayo Solar" viene dada por : Fig (G-1)

(G.1) $\vec{r}_1 = \vec{i}_b r U_b + \vec{j}_b r V_b + \vec{k}_b r W_b$ Por apoyarse en la recta R cumple las dos condiciones siguientes:

-1º), Si para $r = r_1$ la base del "Rayo Solar" tiene la componente $\vec{k}_b$ igual a M_0 se verifica:

(G.2.1) $\vec{i}_b r_1 \times \vec{k}_b = -M_0 = r_1 W_b$; de donde se deduce el valor de r_1 : (G.2.1.1) $r_1 = M_0 / -W_b$
con $\varphi = \varphi_1$ según (G.2.1.2)

-2º) Si la componente X_b de dicho rayo es nula

(G.2.1.2) $V_b = 0$; con $\varphi = \varphi_1$

Recíprocamente si se apoya en Q,

-1º) para el valor de $r = r_2$

(G.2.2.1) $r_2 = N_0 / -W_b$ y (G.2.2.2) $U_b = 0$; con $\varphi = \varphi_2$

En consecuencia, la base del "Rayo Solar" queda definida por la ecuación vectorial:

(G.3) $\vec{r}_1 = \vec{i}_b M_0 U_b / -W_b + \vec{j}_b N_0 V_b / -W_b + \vec{k}_b F(\varphi)$. y su intersección con al Plano Base $Z_b = 0$ define el "Vector Horario" de l reloj:

(G.4) $(\vec{P-H})_b = \vec{i}_b M_0 U_b / -W_b + \vec{j}_b N_0 V_b / -W_b$

Desarrollando esta ecuación, (Capítulo II), se tiene finalmente el "Vector Horario" en el Triedro (B):

$$(G.4.1) (\vec{P-H})_b = \vec{i}_b M_0 \frac{A_b \sin \varphi + B_b \cos \varphi + H_b \operatorname{tg} \delta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \operatorname{tg} \delta} + \vec{j}_b N_0 \frac{M_b \sin \varphi + N_b \cos \varphi + J_b \operatorname{tg} \delta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \operatorname{tg} \delta}$$

y cuyos, "Coeficientes del Vector Horario" son respectivamente, en los Triedros (B) y (A):

Triedro (B)	Triedro (A)
$(E. 6.0) \quad \begin{cases} A_b = -b \operatorname{sen} \phi + n \cos \phi \\ B_b = a \operatorname{sen} \phi - m \cos \phi \\ M_b = -n \operatorname{sen} \phi - b \cos \phi \\ N_b = m \operatorname{sen} \phi + a \cos \phi \\ H_b = j \operatorname{sen} \phi + h \cos \phi \\ J_b = -h \operatorname{sen} \phi + j \cos \phi \end{cases}$	$(E. 6. 8) \quad \begin{cases} A_a = n \\ B_a = -m \\ M_a = -b \\ N_a = a \\ H_a = h \\ J_a = j \end{cases}$

que coinciden con los del Reloj con Estilo Normal al Plano Base multiplicando cada una de sus componentes por el escalar que define la altura de cada hilo. Si $M_0 = N_0 = 1$ se está en el caso del reloj antes citado. Como consecuencia, el desarrollo del "V.H" viene influenciado por los dichos escalares. tal y como se estudia a continuación.

-1º) "Cónicas de insolación diurnas"

En este caso, el valor de las incógnitas X e Y , en las fórmulas algébricas, vienen expresadas por X/M_0 y Y/N_0 , que, desarrolladas, sus coeficientes quedan multiplicados por:

$$(G.5) \quad \begin{array}{lll} \text{El coeficiente de } X^2 \dots\dots\dots N_0^2 & \text{El coef. de } XY \dots\dots\dots M_0 N_0 & \text{El coef. de } Y^2 \dots\dots\dots M_0^2 \\ \text{" " " " } X \dots\dots\dots N_0^2 M_0 & \text{" " } Y \dots\dots\dots M_0^2 N_0 & \text{independ.} \dots\dots\dots M_0^2 N_0^2 \end{array}$$

Por ejemplo, en el Triedro (A), la ecuación dada en la fórmula (E.7.1.1) pasa a ser en el reloj Bifilar la:

$$(G.6) \quad N_0^2 (h^2 - \operatorname{sen}^2 \delta) x^2 + M_0^2 (j^2 - \operatorname{sen}^2 \delta) y^2 + 2M_0 N_0 h j x y + 2N_0^2 M_0 h f x + 2M_0^2 N_0 j f y + M_0^2 N^2 (f^2 - \operatorname{sen}^2 \delta) = 0$$

-2º) "Haz Horario"

Siguiendo el mismo proceso que en el caso anterior, el Haz Horario es el correspondiente al (E.10) multiplicar los coeficientes de las variables X e Y por los factores siguientes,

$$(G.7) \quad \text{El coeficiente de } X \dots\dots\dots N_0 \quad \text{El coef. de } Y \dots\dots\dots M_0 \quad \text{El coef. independ.} \dots\dots\dots M_0 N_0$$

donde finalmente el "Haz Horario" del reloj Bifilar queda expresado en los Triedros (B) y (A) respectivamente por:

$$(G.8.1) \quad y_b = \frac{N_0}{M_0} \frac{f R_b - J_b T}{f S_b - H_b T} x_b + N_0 \frac{C_b}{f S_b - H_b T}$$

$$(G.8.2) \quad y_a = \frac{N_0}{M_0} \frac{m \operatorname{tg} \phi + n}{a \operatorname{tg} \phi + b} x_a + N_0 \frac{-d \operatorname{tg} \phi + c}{a \operatorname{tg} \phi + b}$$

recordando que los Coeficientes de estas ecuaciones, se indican en las fórmulas (E.10.0) del Capt. IV son:

$$(E.10.0.1) \quad R_b = M_b \operatorname{sen} \phi + N_b \cos \phi \quad ; \quad (E.10.0.2) \quad S_b = A_b \operatorname{sen} \phi + B_b \cos \phi$$

$$(E.10.0.3) \quad T = c \operatorname{sen} \phi + d \cos \phi \quad ; \quad (E.10.0.4) \quad C_b = (A_b J_b - M_b H_b) \operatorname{sen} \phi + (B_b J_b - N_b H_b) \cos \phi = \left[\begin{array}{l} = -d \operatorname{sen} \phi + c \cos \phi \end{array} \right]$$

$$(E.10.0.5) \quad R_a = -b \sin \varphi + a \cos \varphi \quad (E.10.0.6) \quad S_a = n \sin \varphi - m \cos \varphi$$

$$(E.10.0.7) \quad C_a = -d \sin \varphi + c \cos \varphi$$

Discusión. en los Triedros (B) y (A)

-1°) Si $H_b = J_b = 0$ ó $h = j = c = d = 0$; según (B.5) y $f = 1$.
Caso del "Reloj Ecuatorial."

Triedro (B)

$$(G.8.1.1) \quad y_b = \frac{N_0}{M_0} \frac{R_b}{S_b} x_b$$

-2°) Si $f = 0$ "Reloj Polar"

$$(G.8.2.1) \quad y_b = \frac{N_0 J_b}{M_0 H_b} x_b - N_0 \frac{C_b}{H_b T} =$$

$$= \frac{N_0}{M_0} \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_H)} x_b - \frac{N_0}{H_b} \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_H)}$$

$$\text{con } \operatorname{tg} \varphi_H = d/c \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \varphi_H = h/j$$

Triedro (A)

$$(G.8.1.2) \quad y_a = \frac{N_0}{M_0} \frac{-b \operatorname{tg} \varphi + a}{n \operatorname{tg} \varphi - m} x_b$$

$$(G.8.2.2) \quad y_a = \frac{N_0 j}{M_0 h} x_a - \frac{N_0}{h \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_H)}$$

-3°) Si $H_b = f = 0$ resulta ($\operatorname{tg} \phi = -h/j$ según (E.6)) "Reloj Polar" en el Triedro (B).
 Si $h = f = 0$ "Reloj Polar" con el "Haz Horario" paralelo al eje $Y_a H$ en el Triedro (A)

$$(G.8.3.1) \quad x_b = M_0 \frac{C_b}{T} = \frac{M_0}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_H)}$$

$$(G.8.3.2) \quad x_a = \frac{M_0}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_H)}$$

$$\text{con } \operatorname{tg} \varphi_H = d/c$$

-4°) El polo H_0 del "Haz Horario", se halla resolviendo las ecuaciones resultantes de igualar a cero, los coeficientes de $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$ en (G.8.1), es decir

$$(G.9) \quad x_0 = M_0 (j \sin \Phi + h \cos \Phi) / f \quad \text{y} \quad y_0 = N_0 (-h \sin \Phi + j \cos \Phi) / f \quad \text{Y en el Triedro } B_0$$

$$(G.9.1) \quad x_0 = 0 \quad \text{y} \quad y_0 = -N_0 (1-f^2)^{1/2} / f$$

(Las Horas Babilónicas, Itálicas y Sidéreas en este tipo de reloj, se estudian en el Capítulo X.)

Fig. (G- 1)

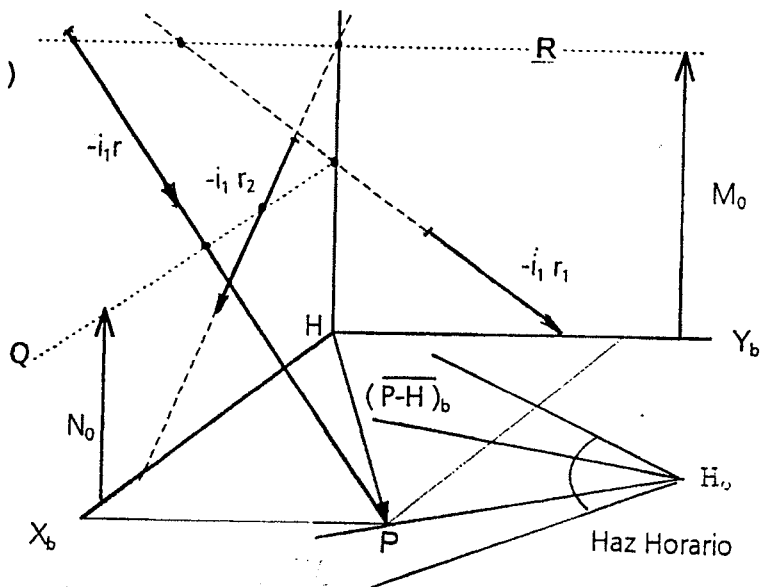
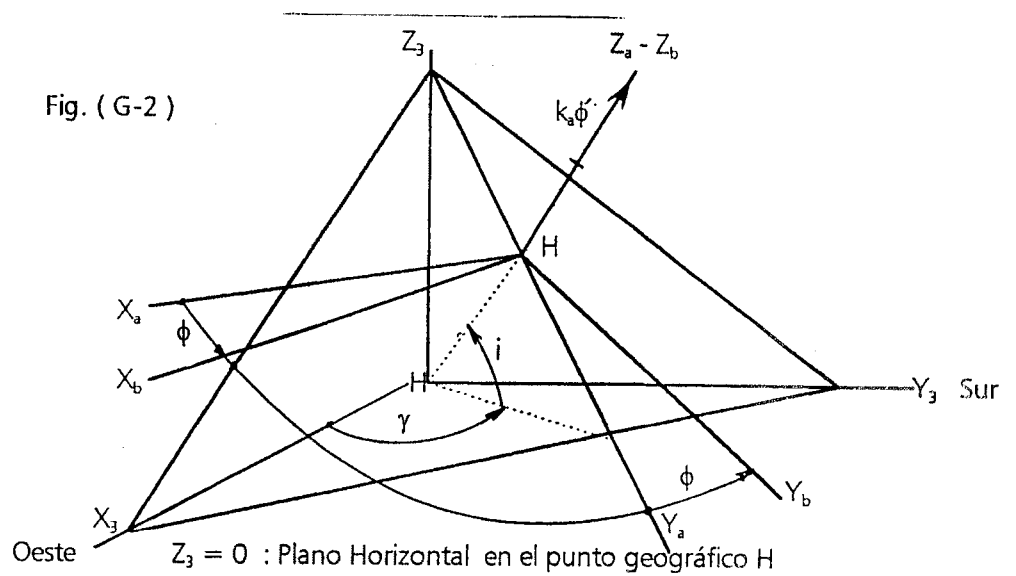


Fig. (G-2)



Capítulo VII

H) CALCULO DE LA ALTURA SOLAR Y DEL AZIMUT

Tomando como base el Triedro (3), se definen como "Altura Solar" θ y "Azimut", β respectivamente, el ángulo entre el plano horizontal y el Rayo Solar y el medido sobre dicho plano, con origen el eje HY_3 (sentido Sur) y la componente horizontal del citado rayo.

El "Rayo Solar" en este triedro y en función de las nuevas variables, es el:

$$(H.1) \quad \vec{i}_1 = \vec{i}_3 U_3 + \vec{j}_3 V_3 + \vec{k}_3 W_3$$

cuyos coeficientes, según se deduce, de la Fig. (H-1), tienen los valores dados por (H.2), y los anteriores, φ y δ están dados por (H.3). Fig. (H-2)

$$(H.2) \quad \begin{aligned} U_3 &= \cos \theta \sin \beta \\ V_3 &= \cos \theta \cos \beta \\ W_3 &= -\sin \theta \end{aligned} \quad (H.3) \quad \begin{aligned} U_2 &= -\cos \delta \cos \varphi = U_3 \text{ con } \alpha = 90^\circ \\ V_2 &= \cos \delta \sin \varphi = V_3 \text{ " " " } \\ W_2 &= -\sin \delta = W_3 \end{aligned}$$

Comparando estos dos grupos de coeficientes, se llega a la siguiente conclusión. Ambos definen el "Rayo Solar" con distintas variables, donde son equivalentes respectivamente δ con θ y φ con $\beta + 90^\circ$ y ello se verifica si el Triedro (3) se confunde con el Triedro (2) es decir, si $\alpha = 90^\circ$ Fig. (H-2) y (H-3)

En el Triedro (A) el "Rayo Solar" $\vec{i}_1$ pasando por la cabeza de un Estilo P_0 incide en el Plano Base ($Z_a = 0$) en el punto P y genera el "Vector A.A" ó "Vector Altura Acimut" $(\vec{P} - \vec{H})_a$ que es similar al "Vector Horario", y cuyo cálculo se ha realizado en el Capítulo IV. Este difiere del anterior en:

- 1º) que define el mismo punto P del "Vector Horario", con distintas variables
- 2º) que en los "c.t.p" el valor de $\alpha = 90^\circ$. (Consecuentemente el "c.t.p" $h = 0$)
- 3º) que es independiente del día del año.
- 4º) la "Altura Solar" θ viene expresada en una escala lineal graduada, y en oposición a δ varia durante el día entre $0^\circ < \theta < 90^\circ - \alpha + 23^\circ 27'$ según la latitud del punto geográfico H, base del reloj, con un máximo 90°

En consecuencia, se repite en este Capítulo lo dicho en el ya citado IV, al que se hará referencia, bajo las condiciones ya indicadas

Por tanto y evitando reiterar su cálculo, el "Vector A.A" tiene como ecuación:

$$(E.5.) \quad \vec{(P-H)}_a = \vec{i}_a \frac{A_a \sin \varphi + B_a \cos \varphi + H_a \operatorname{tg} \theta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \operatorname{tg} \theta} + \vec{j}_a \frac{M_a \sin \varphi + N_a \cos \varphi + J_a \operatorname{tg} \theta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \operatorname{tg} \theta}$$

$$(H.4) \quad \vec{(P-H)}_a = \vec{i}_a \frac{A_a \sin \varphi + B_a \cos \varphi + H_a \operatorname{tg} \theta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \operatorname{tg} \theta} + \vec{j}_a \frac{M_a \sin \varphi + N_a \cos \varphi + J_a \operatorname{tg} \theta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \operatorname{tg} \theta}$$

y según el Estilo, los valores de sus "coeficientes" están dados en el Capítulo IV, siendo las propiedades de este vector, similares al estudiado "Vector Horario",

-1º) Líneas de Altura

Equivalentes a las "Líneas de Insolación", forman el haz lugar geométrico del punto P al variar β , y por tanto, función de θ , los "c.t.p" y las variables X e Y y cuya ecuación algebraica es, con un Estilo cualquiera,

$$(E.7.1) \text{ ó } (H.7) \quad (mx_a - ay_a - mP_{xa} + aP_{ya} - dP_{za})^2 \tan^2 \theta + (nx_a - by_a - nP_{xa} + bP_{ya} + cP_{za})^2 \tan^2 \theta = (jy_a - jP_{ya} + fP_{za})^2$$

El tipo de cónica está expresado por la fórmula;

$$(E.8.1) \text{ ó } (H.8) \quad \cos^2 \theta \leq f^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Elipse} \\ \text{Parábola} \\ \text{Hipérbola} \end{array} \right.$$

-1º) "Línea de "Altura" con Estilo Normal al "Plano Base" ($P_{xa} = P_{ya} = 0$; $P_{za} = 1$)

$$(E.7.1.2) \text{ ó } (H.7.1) \quad \sin^2 \theta x_a^2 - (f^2 - \sin^2 \theta) y_a^2 - 2j y - f^2 + \sin^2 \theta = 0 :$$

-2º) "Líneas de Altura con Estilo Paralelo al Eje T. $\overline{K}_2$

$$(E.7.1.1) \text{ ó } (H.7.2) \quad \sin^2 \theta x_a^2 - (f^2 - \sin^2 \theta) y_a^2 - 2j \cos^2 \theta y - \cos^2 \theta = 0$$

Si el Estilo es $-\overline{K}_2$ el "c.t.p" $f < 0$, cambia de signo el "c.t.p" j según (E.6.7)

Discusión

-1.1) Si $f = 1$ como $h = 0$ resulta que $j = 0 = \cos i$; $i = 90^\circ$; Reloj Horizontal

$$(H.7.2.1) \text{ ó } (H.7.1.1) \quad x^2 + y^2 = 1 / \tan^2 \theta$$

Consecuencia del artificio de que se verifique que $\alpha = 90^\circ$ la paralela al Eje Terrestre sería la normal al plano horizontal del punto geográfico H.

-1.2) Si $f = 0$, como consecuencia $j = 1 = \cos i$; $i = 0^\circ$; Relojes Verticales y en este caso Polares. El Estilo se elige el Normal al Plano Base, como en el Capítulo IV. Ejmp en el Triedro (B_0)

$$(E.7.1.5) \text{ ó } (H.7.3) \quad \tan^2 \theta x_a^2 - y_a^2 + \tan^2 \theta = 0 \text{ y ya que } \cos^2 \theta > 0 \text{ las "Líneas son Hipérbolas}$$

-2º) Haz Azimutal

Similar al "Haz Horario", toma la expresión siguiente al eliminar θ en el "Vector A.A"

$$(E.10) \text{ ó } (H.9) \quad y_a = \frac{f R_a - J_a T}{f S_a - H_a T} x_a + \frac{C_a}{f S_a - H_a T} \text{ y los valores de estas expresiones son}$$

$$(H.9.0.1) \quad R_a = -N_a \sin \beta + M_a \cos \beta ; ; (H.9.0.3) \quad T = -d \operatorname{sen} \beta + c \cos \beta$$

$$(H.9.0.2) \quad S_a = -B_a \sin \beta + A_a \cos \beta ; ; (H.9.0.4) \quad C_a = -(B_a J_a - N_a H_a) \sin \beta + (A_a J - M_a H_a) \cos \beta$$

Si el Estilo es paralelo al Eje T. y $f > 0$ (E.6.6) ó (E.6.7) $A_a = a$, etc.; y $C_a = 0$

Si el Estilo es paralelo al Eje T. y $f < 0$ (E.6.6) ó (E.6.7) $A_a = -a$, etc.; y $C_a = 0$

Si el Estilo es normal al plano (E.6.8) $A = n$ etc.; y $C_a = -c \operatorname{sen} \beta - d \cos \beta$

Haz Acimutal con el Estilo normal al Plano:

$$(E.10.1) \text{ ó } (H.9.1) \quad (n \tan \beta - m) x_a - (b \tan \beta - a) y_a + c \tan \beta + d = 0 \quad \text{y su Polo } H_0 :$$

$$(H.9.1.1) \quad x_0 = h/f = 0 ; y_0 = j/f = (1-f^2)^{1/2}/f = 1/\operatorname{tg} i$$

Discusión

- 2.1) Si $f = 1$, $H_a = J_a = 0$ Estilo paralelo al Eje Terrestre. Y el polo del Haz H_0 es H

Como en el punto 1.1), $j = 0 = \cos i$; $i = 90^\circ$ Reloj Horizontal

$$(E.10.2.) \text{ ó } (H.9.2) \quad y_a = R_a / S_a \quad x_a = -\operatorname{tg}(\beta + \gamma) x_a$$

- 2.2.) Si $f = 0$ Caso del Reloj Polar y Verticales. Con Estilo normal al Plano

$$(E.10.3.) \text{ ó } (H.9.3) \quad x_a = C_a / J_a T = 1/\operatorname{tg}(\beta + \gamma) \quad (\text{Haz paralelo al eje } Y_a H)$$

- 2.3) Si $H_a = J_a = 0$ El estilo es Paralelo al Eje T. y el Polo del Haz, es H. Se llega a :

$$(E.10.4) \text{ ó } (H.9.4) \quad y_a = R_a / S_a \quad x = -\operatorname{tg}(\beta + \gamma) x_a / \operatorname{sen} i ; \text{ Si } i = 90^\circ \text{ (H.9.2) } \text{ Reloj Horizontal }$$

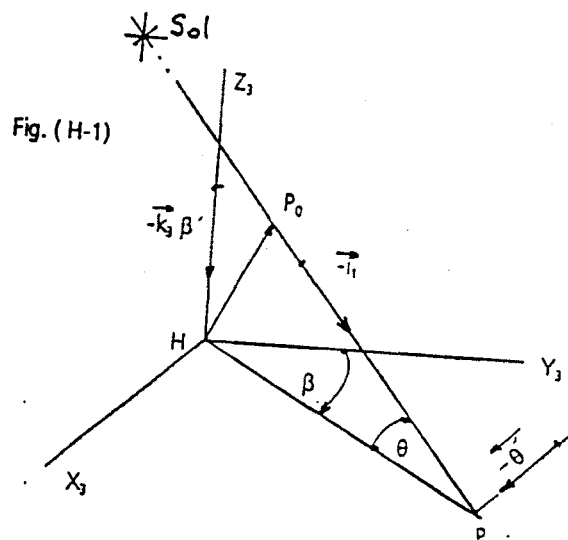
Se omite, salvo casos como los de los ejemplos anteriores, el expresar las fórmulas gomónicas en función de las variables "i" y "γ".

CONCLUSIÓN

Mediante el artificio de considerar que $\alpha = 90^\circ$, sin tener en cuenta la latitud real del punto geográfico H donde se encuentra el plano base, y situarlo en el Polo, tanto la "Altura Solar" como el "Azimut" con $\gamma = C^t$ son función de la inclinación i y de la codeclinación δ . Como consecuencia, por ejpl., el Estilo Paralelo al Eje Terrestre pasa a ser el Normal al Plano Horizontal de cualquier punto geográfico H

FIGURAS

Para mejor comprensión de las figuras, se supone que el Polo H_0 del Haz Azimutal coincide con el origen H de los Triedros



CAPITULO VIII

J) Horario de Iluminación

A continuación se calcula el tiempo de iluminación de un plano dado. Siendo según los capítulos anteriores, $(\overline{S-H})_a = \overline{i}_2$ el "Rayo Solar", $\overline{k}_a = (\overline{A-H})_a$ el versor del plano (A) y ω el ángulo entre ambos. Para que haya iluminación en el desarrollo de "Vector Horario", se han de cumplir las dos siguientes condiciones: Fig. (J-1)

-1º) Que el Sol se encuentre sobre el plano del horizonte, del punto geográfico H, es decir que la componente $\overline{k}_3$ del versor $(\overline{S-H})$ sea negativa (Insolación del horizonte)

$$(J.1) \quad W_3 < 0 \quad (\text{valores de } i = \gamma = 90^\circ \text{ en los "c.t.p"}) \quad \text{ó sea: } (J.1.1) \quad \underline{\text{sen } \varphi > \text{tg } \alpha_h \text{ tg } \delta}$$

que es la misma fórmula que la (E.14.1) del Capítulo IV. El Orto y el Ocaso en este plano, se corresponden con los ángulos dados por:

$$(J.1.2) \quad \text{sen } \varphi_{\text{ort o}} = \text{tg } \alpha_h \text{ tg } \delta$$

-2º) Que el Sol ilumine el plano $(A)_H$ y de modo similar al caso anterior, que la componente $\overline{k}_a$ de $(\overline{S-H})_a$ sea negativa, para lo cual:

$$(J.2) \quad W_a = (\overline{S-H})_a \times \overline{k}_a = \cos \omega = -(\text{csen } \varphi + \text{dcos } \varphi + \text{ftg } \delta) \cos \delta < 0 \quad \text{ó}$$

$$(J.2.1) \quad \omega > 90^\circ$$

Como consecuencia, el Orto y el Ocaso en dicho plano, se presentan para $\omega = 90^\circ$ con las soluciones φ_α y φ_ω

$$(J.2.2) \quad (\text{csen } \varphi_{\text{ort o}} + \text{dcos } \varphi_{\text{ort o}} + \text{ftg } \delta) = 0 \quad \text{que desarrollada en función de la tg, se llega a}$$

$$(J.2.2.1) \quad \text{tg } \varphi_{\text{ort o}} = \frac{-c d \pm f \text{tg } \delta ((1 - f^2 / \cos^2 \delta))^{1/2}}{c^2 - f^2 \text{tg}^2 \delta}$$

Aplicando las condiciones de iluminación, en un punto geográfico H de latitud α_h se verifica que:

-1º) Si el Orto en el plano horizontal, es anterior al del plano $(A)_H$, la iluminación se efectúa entre el Orto del $(A)_H$ y el Ocaso del horizontal

-2º) Si el Orto del plano $(A)_H$ es anterior al del horizontal, la iluminación se efectúa entre el Orto del horizontal y el Ocaso del $(A)_H$

Independientemente de las condiciones antes citadas, el tiempo de iluminación t_i sería el mismo en planos paralelos, (Vease Capítulo XI) Fig. (J-2), y en el caso particular del plano horizontal (A_k) en el punto geográfico K, quedaría expresado por

$$(J.3.1) \quad t_i = t_{\text{ort}} - t_{\text{ort}} = (\varphi_{\text{ort}} - \varphi_{\text{ort}}) / 15 \text{ horas,}$$

NOTA Partiendo de (J.1.2) $\sin \varphi_{\alpha \omega} = \operatorname{tg} \alpha_h \operatorname{tg} \delta$ Orto y Ocaso en el Triedro (3), se verifica en los valores del "Angulo Horario" que:

- 1º) Si $\sin \varphi > 0$ $\varphi_{\alpha}(\text{Orto}) > \varphi_{\omega}(\text{Ocaso})$ Fig. (J - 3)
- 2º) Si $\sin \varphi < 0$ $\varphi_{\alpha}(\text{Orto}) < \varphi_{\omega}(\text{Ocaso})$ Fig. (J - 4)

Tiempo que tarda el disco solar en atravesar un plano determinado

El Sol no es un elemento puntual, por lo cual, en su movimiento aparente, su disco tarda un tiempo t_0 en atravesar un plano cualquiera (A) ó su centro (C) en recorrer una distancia en la dirección normal al plano, igual al diámetro solar, cualquiera que sea su trayectoria. Ese tiempo queda expresado por $t_0 = t_2 - t_1$ donde estos últimos son respectivamente los correspondientes a las posiciones (1) y (2) donde el disco es tangente a (A). Fig. (J - 5)

El cálculo de t_2 y t_1 es el siguiente, partiendo de los siguientes

Dat os

- 1º) El plano (A) está dado en el Triedro (A) por $Z_a = 0$
- 2º) El tiempo t_0 buscado es el mismo en planos paralelos; para facilitar el cálculo se toma el horizontal (A_k) en el p. g. K, y por tanto : $f_h = f_k = \sin \alpha_k$ y $c_k = -\cos \alpha_k$ siendo en este caso :

$$W_a = -c_k \sin \varphi \cos \delta - f_h \sin \delta = \cos \alpha_k \sin \varphi \cos \delta - \sin \alpha_k \sin \delta$$

- 3º) Distancia media Sol - Tierra : $d_0 = 149,5 \times 10^6 \text{ Km}$; Diámetro Solar $D = 1,4 \times 10^6 \text{ Km}$

- 4º) Posición (1). Momento en el cual, el centro Solar (C) se encuentra a la distancia $D/2$ del plano (A) Fig. (J - 5), de donde

$$(J.5.1) \quad W_{a1} = D/2 d_0$$

- 5º) Posición (2) Con razonamiento similar al punto anterior se tiene:

$$(J.5.2) \quad W_{a2} = -D/2 d_0$$

- 6º) Desarrollando las fórmulas anteriores se llega a :

$$(J.5.3) \quad \sin \varphi_1 = \left[\frac{D}{2 d_0 \cos \delta} + f_h \operatorname{tg} \delta \right] \frac{1}{(1 - f_h^2)^{1/2}} = \frac{D}{2 d_0 \cos \delta \cos \alpha_k} + \operatorname{tg} \alpha_k \operatorname{tg} \delta$$

$$(J.5.4) \quad \sin \varphi_2 = \left[\frac{-D}{2 d_0 \cos \delta} + f_h \operatorname{tg} \delta \right] \frac{1}{(1 - f_h^2)^{1/2}} = \frac{-D}{2 d_0 \cos \delta \cos \alpha_k} + \operatorname{tg} \alpha_k \operatorname{tg} \delta$$

Resolviendo estas ecuaciones en φ_1 y φ_2 el tiempo buscado es

$$(J.4.2) \quad t_0 = (\varphi_2 - \varphi_1) / 15$$

Tiempo que la sombra del disco solar correspondiente a un reloj dado, se halla sobre un punto P de su "Vector Horario"

-1º) Sea (A) el plano en H donde se halla el punto P definido por el "Vector Horario" en el instante t_h correspondiente al "Angulo Horario" φ_h ; se escoge por comodidad, el Estilo normal al plano.

-2º) Como en el caso anterior, en el plano (A_k), paralelo al ya citado, y horizontal en el p.geográfico. K, el tiempo t_0 buscado es el mismo así como el "Vector Horario" pero con distintos "c.t.p" siendo su "Angulo Horario":

$$(J.6) \text{ ó } (F.2.1) \quad \varphi_k = 15 t_h + \lambda_k + 90^\circ - Ec \, Tp / 4 - 15 N \quad \text{si } t_0 \text{ es la hora oficial y } \lambda_h = 0$$

-3º) En el (A_k) se halla el ángulo entre "Vector Horario" y el eje $X_a K$. Fig (J - 6).

$$(J.7) \text{ ó } (F.5.1) \quad \operatorname{tg} \mu_k = - \frac{f_0 \operatorname{sen} \varphi_k - c_0 \operatorname{tg} \delta}{\cos \varphi_k} \quad \text{donde } f_0 = \operatorname{sen} \alpha_k = f_h \quad \text{y } c_0 = -\cos \alpha_k$$

-4º) El versor del plano (A_1), formado por el Estilo normal y su "Vector Horario" tiene como valor

$$(J.8) \quad (\overline{A_1 - K})_a = -\overline{i}_a \operatorname{sen} \mu_k + \overline{j}_a \cos \mu_k, \quad \text{Fig (J - 6)}$$

que en el Triedro (2) según las fórmulas (B.4.2) toma la expresión::

$$(J.8.1) \quad (\overline{A_1 - K})_2 = -\overline{i}_2 \operatorname{sen} \mu_k + \overline{j}_2 f_0 \cos \mu_k + \overline{k}_2 c_0 \cos \mu_k$$

-5º) El plano (A_2), paralelo al anterior y horizontal en el punto K_3 es el que debe atravesar el disco solar, caso estudiado en el punto anterior con el valor de $f_2 = c_0 \cos \mu$ y por tanto, aplicando las fórmulas estudiadas anteriormente (J.5.3) (J.5.4) se llega a:

$$(J.5.5) \quad \operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{D}{2 d_0 \cos \delta} + c_0 \cos \mu_k \operatorname{tg} \delta \frac{1}{(1 - c_0^2 \cos^2 \mu_k)^{1/2}}$$

$$(J.5.6) \quad \operatorname{sen} \varphi_2 = \frac{-D}{2 d_0 \cos \delta} + c_0 \cos \mu_k \operatorname{tg} \delta \frac{1}{(1 - c_0^2 \cos^2 \mu_k)^{1/2}}$$

siendo el tiempo buscado: (J.4.3) $t_0 = (\varphi_2 - \varphi_1) / 15$ (tiempo en horas)

Discusión

-1º) Si $f_h = f_k = 1$; $\alpha_k = 90^\circ$ y $c_0 = \cos \alpha_k = 0$; El plano (A) es paralelo al ecuatorial y las fórmulas anteriores pasan a ser:

$$(J.5.5.1) \quad \operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{D}{2 d_0 \cos \delta} = C^{te}$$

El tiempo t_0 es C^{te} para cualquier punto P, y función de δ

$$J.5.6.1.) \quad \operatorname{sen} \varphi_2 = \frac{-D}{2 d_0 \cos \delta} = C^{te}$$

-2º) Supuesto que $f_h = f_k = 0$; $\alpha_k = 0^\circ$ y $c_0 = 1$ se está en el caso del Reloj Polar

Si además $\mu_k = 0$, los valores de las fórmulas de senos no serían válidas. Motivo: el plano (A_s) sería paralelo al Ecuador y el disco solar, que se mueve en la Esfera Celeste sobre un paralelo, no lo cortaría.

Ejemplos

-1º) Tiempo que tarda el Sol en cruzar los planos horizontales en diversas latitudes con distintos valores de la declinación solar.

α	$\delta = 23,44^\circ$	$\delta = 0^\circ$
$0,00^\circ$	$2^m 19^s$	$2^m 08^s$
$40,40^\circ$	$3^m 16^s$	$2^m 48^s$
$62,00^\circ$	$8^m 34^s$	$4^m 32^s$
$66,00^\circ$	$26^m 14^s$	$5^m 14^s$

-2º) Calcular el tiempo que la sombra del disco solar se encuentra sobre el punto P correspondiente a un reloj situado en el p. geográfico H (42°) con valores de los ángulos de inclinación y codeclinación, respectivamente $i = \gamma = 80^\circ$ el día 1º de septiembre a las 12^h hora oficial.

DATOS

$c = -0,846283$; $d = 0,0301537$; $f = 0,5318798$ (según (B.2))

$\delta = 8,341^\circ$; $\tan \delta = 0,1466$; $\cos \delta = 0,9894$ (día 1º de Septiembre)

$Ec.Tp. = 7^s = 0,117^m$ (día 1º de Septiembre)

$\lambda_k = \arctg(d/c) = -2,041^\circ$

$\varphi_k = 15 t_0 + \lambda_k + 90^\circ - Ec.Tp / 4 - 30^\circ = 237,93^\circ$ (si t_0 es la hora oficial y $\lambda_{41} = 0$)

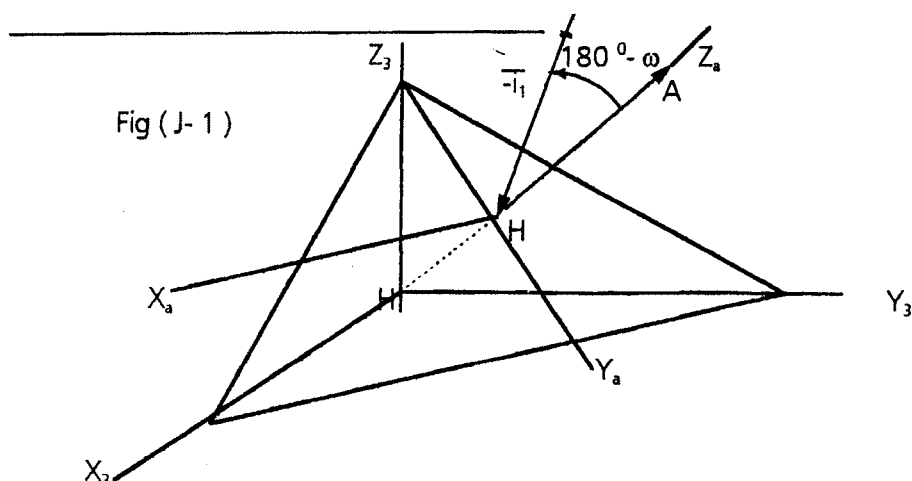
$\sin \varphi_k = -0,8474$; $\cos \varphi_k = -0,5310$; $\sin \alpha_k = f = f_0$; $\cos \alpha_k = -c_0 = 0,8468$ (según (F.4.1))

$\tan \mu_k = -0,6151$; $\mu_k = 148,405^\circ$; $\cos \mu_k = -0,8518$ (según (F.5.1))

Aplicando las fórmulas de senos (J.5.5) y (J.5.6) se obtienen los valores de

$\varphi_2 = -8,37^\circ$; $\varphi_1 = -9,17^\circ$ respectivamente, de donde se deduce el tiempo buscado:

$$(J.4.4) \quad t_0 = 3,2^m$$



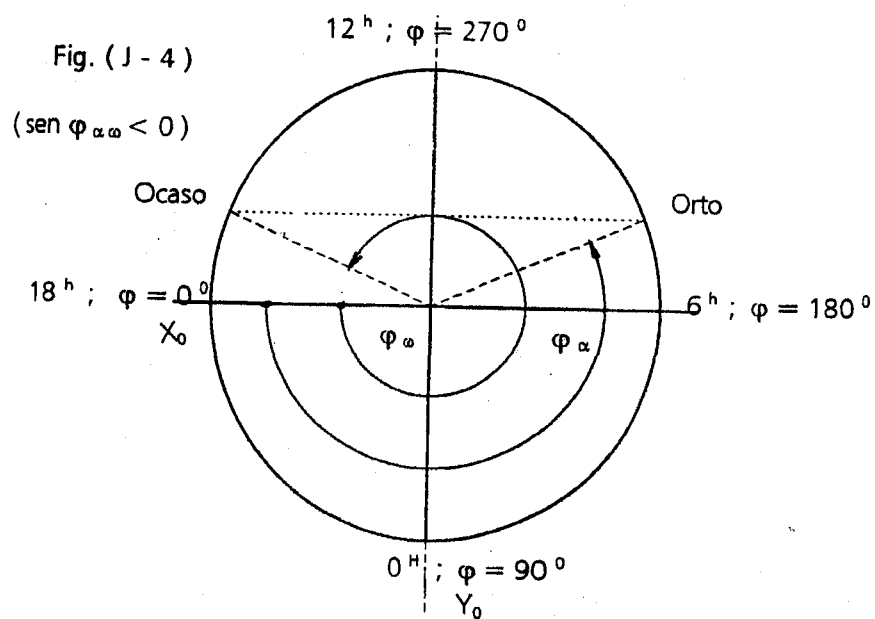
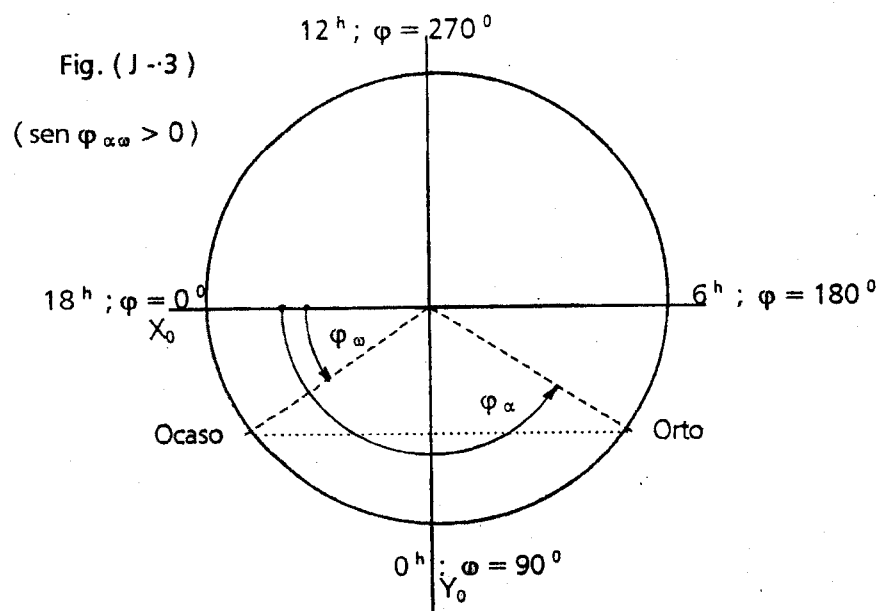
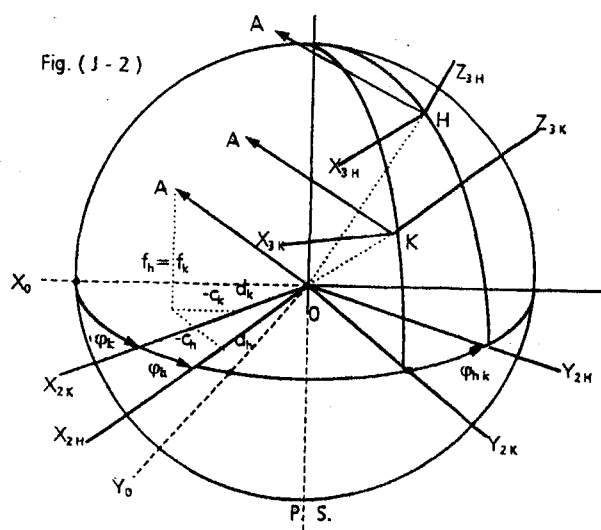
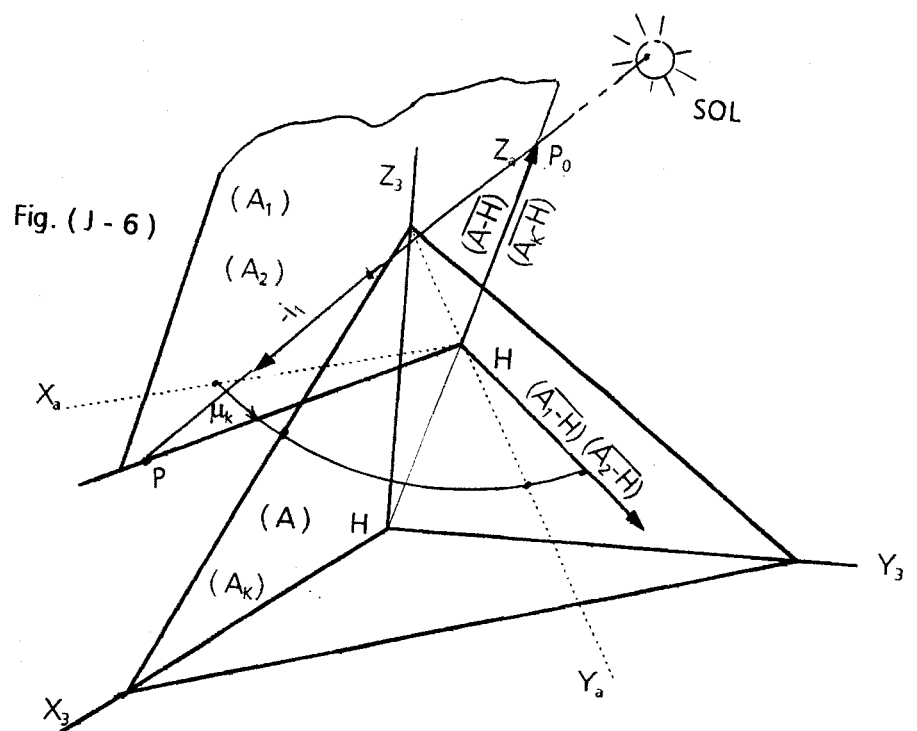


Fig. (J - 5)



CAPITULO IX

K) RELACIÓN ENTRE LOS TRIEDROS (1) Y (A). LÍNEAS HORARIAS, BABILÓNICAS, ITÁLICAS Y SIDÉREAS

La intersección de planos paralelos a los $Y_1 = 0$ y $X_1 = 0$ del Triedro (1) con el Triedro (A) generan en este último, planos C y D que dan lugar a los siguientes casos gnomónicos.

-1°) El haz de planos C, pasando por un Estilo paralelo al Eje Terrestre, corta a cualquier superficie $S_a(X, Y, Z) = 0$ en puntos P que definen las Líneas Horarias en planos, cilindros, conos, esfera etc.

-2°) El conjunto de planos D, tangente a un cono recto de eje paralelo al terrestre y con vértice en la cabeza de un Estilo, corta, a cualquier superficie $S_a(x, y, z) = 0$ en puntos P, que definen Líneas Babilónicas ó Itálicas; y si un D es además, paralelo a la Eclíptica, según Líneas Horarias Sidéreas.

Líneas Horarias Fig. (K.1) y (K.2)

-1.1) Al proyectar la variable Y_1 sucesivamente sobre los Triedros (2), (3) y (A), se llega en este último, a la expresión de los planos C, en función del ángulo horario φ , y los "c.t.p"

$$(K.1) \quad (m \operatorname{sen} \varphi + n \cos \varphi) X_a - (a \operatorname{sen} \varphi + b \cos \varphi) Y_a + (d \operatorname{sen} \varphi - c \cos \varphi) Z_a = 0$$

-1.2) La superficie a estudiar, S_a en paramétricas, tendrá su ecuación correspondiente en función de una ó mas variables. Se estudian los siguientes casos:

1.3.1) Líneas Horarias sobre un Plano

La ecuación del plano base es (K.2) $Z_a = 0$

Y la intersección con los planos C es:

$$(K.3) \quad Y_p = \frac{m \operatorname{tg} \varphi + n}{a \operatorname{tg} \varphi + b} X_p ; \text{ Haz Horario sobre un plano coincidente con la (E. 10.2).}$$

1.3.2) Líneas Horarias sobre un Cilindro. Fig. (K-3)

La base del cilindro se halla sobre el plano $Z_a = 0$ y su ecuación:

$$(K.4) \quad X_a = F_1(\omega) ; Y_a = F_2(\omega) ; Z_a = Z_p$$

siendo ω una función cualquiera. La Z_p intersección con el plano C está expresada por:

$$(K.5) \quad Z_p = \frac{(m \sin \varphi + n \cos \varphi) F_1(\omega) - (a \sin \varphi + b \cos \varphi) F_2(\omega)}{-(d \sin \varphi - c \cos \varphi)}$$

donde el valor de Z_p en $f(\varphi, \omega)$ define, con la s (K.4) los puntos P.

1.3.3) Líneas Horarias sobre un Cono. Fig (K-4)

La definición del Cono se expresa por la altura L del vértice V y la ecuación en paramétricas de su base sobre el plano $Z_a = 0$

$$(K.6) \quad \begin{array}{l} \text{Vértice} \quad V(0,0,L) \\ \text{Base} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_a = F_1(\omega) \\ Y_a = F_2(\omega) \end{array} \right. \end{array}$$

Ecuación de un punto $P(X_p, Y_p)$ sobre una generatriz

$$\frac{X_p}{-X_a} = \frac{Y_p}{-Y_a} = \frac{Z_p - L}{L}, \quad \text{que en paramétricas resulta ;}$$

$$(K.7) \quad X_p = -F_1(\omega) \frac{Z_p - L}{L} \quad \therefore \quad Y_p = -F_2(\omega) \frac{Z_p - L}{L}$$

Su intersección con los planos C (y despejando la variable Z_p)

$$(K.8) \quad Z_p = L \frac{(m \sin \varphi + n \cos \varphi) F_1(\omega) - (a \sin \varphi + b \cos \varphi) F_2(\omega)}{(m \sin \varphi + n \cos \varphi) F_1(\omega) - (a \sin \varphi + b \cos \varphi) F_2(\omega) - L(d \sin \varphi - c \cos \varphi)}$$

que con las fórmulas (K.6) definen cada un de los punto P en $f(\varphi, \omega)$

Para facilitar la construcción geométrica, sea la distancia desde P a la base del cono Z_q

$$(K.8.1) \quad Z_q = Z_p / \cos \mu = \frac{Z_p}{(1 + \tan^2 \mu)^{1/2}} = \frac{L Z_p}{(F_1^2(\omega) + F_2^2(\omega) + L^2)^{1/2}}$$

Para simplificar la construcción del reloj, la proyección del punto P sobre el plano $Z_a = 0$ se hallan sobre la recta cuya pendiente está dada por :

$$(K.6.1) \quad \tan \Omega = F_2(\omega) / F_1(\omega)$$

1.3.4) Líneas Horarias sobre una Esfera Fig (K-5)

La ecuación paramétrica de la Esfera es la siguiente

$$(K.9) \quad \begin{aligned} X_a &= R \sin \psi \cos \omega \\ Y_a &= R \sin \psi \sin \omega \\ Z_a &= R \cos \psi \end{aligned}$$

La intersección con los planos C da como resultado la expresión :

$$(K.10) \quad ((m \operatorname{tg} \varphi + n) \cos \omega - (a \operatorname{tg} \varphi + b) \sin \omega + (d \operatorname{tg} \varphi - c)) / \operatorname{tg} \psi = 0$$

ecuación que enlaza las tres variables que definen el punto P en $f(\varphi, \omega, \psi)$; solución en ángulos

A cada valor de $\psi = C^*$ por cada uno de ω , corresponde uno de φ (Paralelos)

A cada valor de $\omega = C^*$ por cada uno de ψ , corresponde uno de φ (Meridianos)

Estilo

Se parte de la base que el Estilo es paralelo al Eje Terrestre, y que en el Triedro (A) según el Capítulo III, viene dado por las fórmulas :

$$(D.1.1.1) \text{ ó } (K.11.1) \quad (\overline{P-H})_a = -\bar{i}_a h - \bar{j}_a j + \bar{k}_a f; \text{ si } f > 0$$

$$(D.1.1.2) \text{ ó } (K.11.2) \quad (\overline{P-H})_a = \bar{i}_a h + \bar{j}_a j - \bar{k}_a f; \text{ si } f < 0$$

$$\text{ó los ángulos } (D.2.1) \text{ ó } (K.12) \quad \operatorname{tg} \varphi_a = -h/J \quad \text{y} \quad (D.3.1) \text{ ó } (K.113) \quad \sin \psi = f$$

Ejemplos

- 1º) Cilindro parabólico con base en el plano horizontal ($\gamma = i 90^\circ$: Triedro (3))

La base se halla sobre el plano $Z_3 = 0$ y su ecuación en el Triedro (3) es :

$$(K.4.1) \quad X_3 = 2p \operatorname{tg}^2 \omega \quad Y_3 = 2p \operatorname{tg} \omega \quad Z_3 = 0$$

La Z_p intersección con los planos C está dada por:

$$(K.5.1) \quad Z_p = \frac{-2p}{\cos \alpha} (\operatorname{tg}^2 \omega \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \omega \sin \alpha)$$

siendo en este caso $a = 0$, $b = -\sin \alpha$; $m = 1$; $n = 0$; $d = 0$; $c = -\cos \alpha$:

Las Líneas Horarias se expresan por (K.4.1) y (K.5.1)

- 2º) Cono con base elíptica en el plano horizontal ($\gamma = i 90^\circ$: Triedro (3))

La base se halla sobre el plano $Z_3 = 0$ y su ecuación en el Triedro (3) es ::

$$(K.6.1) \quad X_3 = \sin \omega \quad Y_3 = 2 \cos \omega \quad Z_3 = 0 \quad \text{y} \quad L = 9$$

La Z_p intersección con los planos C está dada por:

$$(K.8.1) \quad Z_p = 9 \frac{\sin \omega \operatorname{tg} \varphi + 2 \sin \alpha \cos \omega}{\sin \omega \operatorname{tg} \varphi + 2 \sin \alpha \cos \omega - 9 \cos \alpha}$$

Siendo el valor de Z_q del punto P a la base del cono :

$$(K.8.1.1) \ Z_p = \frac{81 (\sin \omega \operatorname{tg} \varphi + 2 \sin \alpha \cos \omega)}{(3 \cos^2 \omega + 82)^{1/2} (\sin \omega \operatorname{tg} \varphi + 2 \sin \alpha \cos \omega - 9 \cos \alpha)}$$

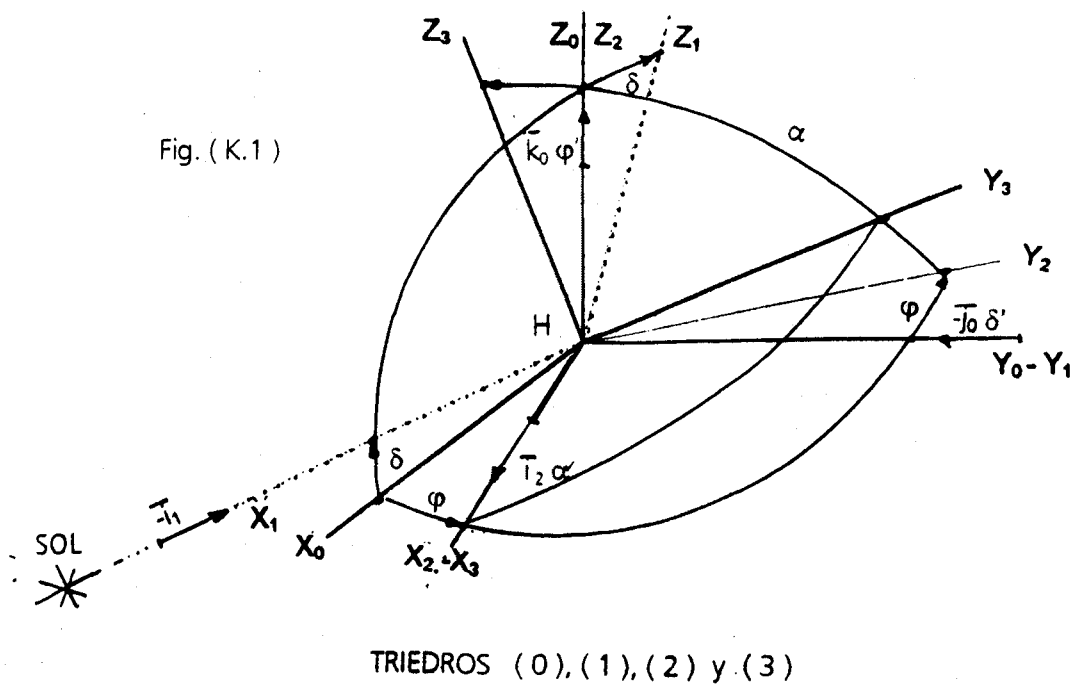
Las Líneas Horarias se hallan mediante (K.6.1) y (K.8.1.1)

-3º) Esfera . Estudiada sobre el plano base vertical no declinante $i = 0^\circ$; $\gamma = 90^\circ$

La ecuación de la esfera consta en (K.9) y la intersección con los planos C resulta,

$$(K.10.1) \quad \operatorname{tg} \psi (\cos \omega \operatorname{tg} \varphi - \cos \alpha \operatorname{sen} \omega) = -\operatorname{sen} \alpha$$

siendo en este caso, $a = 0$, $b = \cos \alpha$; $m = 1$; $n = 0$; $d = 0$; $c = -\sin \alpha$



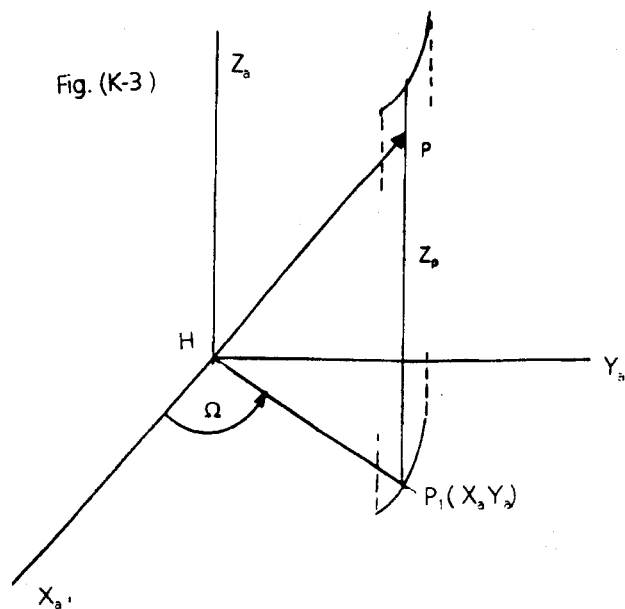
[illegible]

Fig. (K- 4)

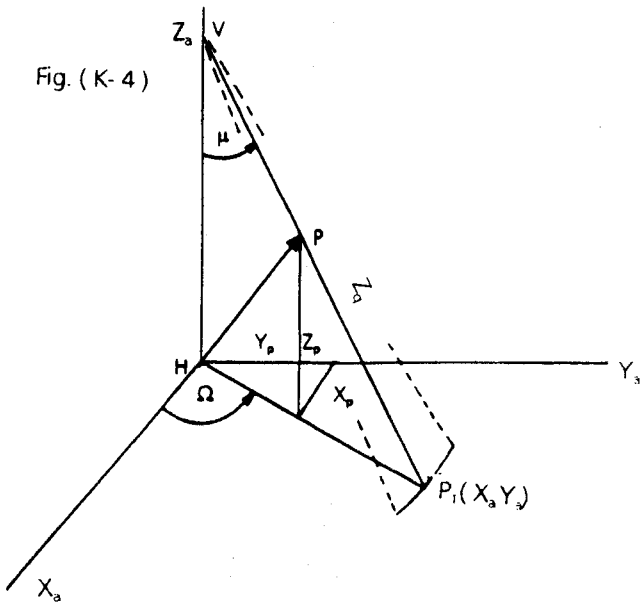
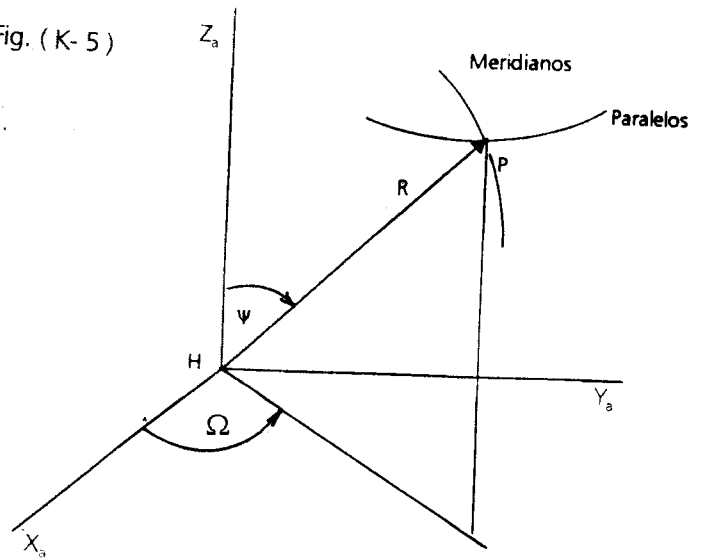


Fig. (K- 5)



CAPITULO X

L) LÍNEAS BABILÓNICAS, ITÁLICAS Y SIDÉREAS

En el Triedro (1), sustituyendo el vector de giro "Declinación Solar" ($-j_0\delta'$) por el de "Latitud Geográfica" del punto geográfico K, ($-j_0\alpha_K$), se genera el plano $X_1 = 0$, ahora el D_1 que corta a la Esfera Terrestre, representada por el Triedro (2), mediante planos D_2 según círculos máximos que tienen las siguientes características Fig. (L - 1) y Fig. (L - 2)

- 1º) Son círculos Horarios por estar situados en el Triedro (2)
- 2º) Se apoyan en los paralelos de latitud $(90^\circ - \alpha_K)$,
- 3º) Son paralelos a los horizontes de los puntos geográficos K, (α_K λ_K) comprendidos entre las latitudes $90^\circ - \varepsilon > \alpha_K > -(90^\circ + \varepsilon)$,
- 4º) Su envolvente es un cono recto cuyo eje es el de la Tierra, con vértice en su centro y semiángulo (α_K)
- 5º) Planos D ($X_1 + C^* = 0$) del Triedro (1), paralelos a los anteriores y trasladados al Triedro (A), pasando por la cabeza de un Estilo dado y con distintos Ángulos Horarios, cortan a cualquier superficie $S_0 (X, Y, Z) = 0$, según Líneas Horarias Babilónicas, Itálicas, Sidéreas o Equinocciales.
- 6º) El estudio de estas líneas correspondientes al punto K, se realiza en el H, de latitud α_H en función de sus "c.t.p" y de latitud α_K
- 7º) Si $\alpha_K = \alpha_H$ las susodichas Líneas se refieren al plano situado en H
- 8º) Si $\alpha_K = 90^\circ - \varepsilon$ se generan las Líneas Sidéreas, con Angulo Horario propio
- 9º) Si $\alpha_K = 0$ el cono envolvente de los planos D_2 se convierten en una recta paralela al Eje Terrestre. Como consecuencia, genera un haz que corta a cualquier plano, según Líneas Equinociales, con otros Angulos Horarios, al coincidir, por definición, el D_1 con el $X_K = 0$, es decir, los planos D son normales al Ecuador y los D_2 cortan a la Esfera Terrestre en Meridianos. Este caso es similar al del haz de planos C (Capítulo IX), generados por el $Y_1 = 0$ y del que difiere en los nuevos Angulos Horarios, que se estudian a continuación

Angulos Horarios Fig. (L - 3)

Los nuevos Ángulos Horarios se definen, como el Equinoccial φ , en el Triedro (0), y sus orígenes, definidos en el Triedro (3) por la fórmula (J.1.2.) $\text{sen } \varphi = \text{tg } \alpha_K \text{ tg } \delta$ son en el Triedro (0) con $\alpha_K = 0$, (J.1.2.1) $\text{sen } \varphi = 0$. Los orígenes de ambos resultan; el φ_b babilónico en el Eje $-Y_0H$ y el φ_i (o su inverso el φ_0) en el Eje Y_0H . Aceptando que las Babilónicas e Itálicas sean de la misma duración que las Equinocciales, la relación que existe entre ellas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{(L.1.1)} \quad \varphi_i &= \varphi - 90^\circ; & \text{(L.1.2)} \quad \varphi_0 &= 360^\circ - \varphi_i; & \text{(L.1.3)} \quad \varphi_b &= \varphi + 90^\circ; \\
 \text{(L.1.4)} \quad \varphi_b &= \varphi_i + 180^\circ; \\
 \text{(L.1.1.1)} \quad \varphi_i &= 15t; & \text{(L.1.3.1)} \quad \varphi_b &= 15t_b; & \text{(L.1.0.1)} \quad \varphi &= 15t + 90^\circ
 \end{aligned}$$

Se deduce, siendo estos nuevos ángulos función del Equinoccial que:

-1º) Los senos y cosenos de las líneas Babilónicas e Itálicas tienen el mismo coeficiente y con distinto signo

-2º) Los senos de las dos ecuaciones de Itálicas, tienen el mismo coeficiente y con distinto signo, y los cosenos con el mismo

Ecuación de los planos D

Las ecuaciones del plano D_1 en el Triedro (1) $X_1 = 0$, vienen indicadas en el Triedro (A), mediante las fórmulas (B.3) y (B.3.1.) del Capítulo II $X_1 = U_a x + V_a y + W_a z = 0$. Este plano genera los planos D mediante los Estilos y Ángulos Horarios correspondientes a cada línea a estudiar. Son las siguientes:

(B.3) ó (L.2) $(x - P_{ox}) U_a + (y - P_{oy}) V_a + (z - P_{oz}) W_a = 0$ o bien la fórmula general

(Lxm.3) $U_a x + V_a y + W_a z + Q_a = 0$ con (L.4) $Q_a = -(U_a P_{ox} + V_a P_{oy} + W_a P_{oz})$; donde:

- Si el Estilo es Paralelo al. Ej. T. ($f > 0$): $k_2 = -i_a h - j_a j + k_a f$; (L.4.1) $Q_a = \text{sen } \alpha_k$

- Si el Estilo es Paralelo al. Ej. T. ($f < 0$): $-k_2 = i_a h + j_a j - k_a f$; (L.4.2) $Q_a = -\text{sen } \alpha_k$

(Se recuerda que en este caso, con respecto al anterior, cambian el signo de los "c.t.p" a, b, m. n. h, j según (E.6.7) (excepto en el Estilo); pero al cambiar de igual modo el valor de Q, las fórmulas resultantes son iguales en ambos casos. Los valores Q se calculan teniendo en cuenta las fórmulas (B.5) y (B.6) del Capítulo II)

- Si el Estilo es Normal al Plano base, k_a se tiene: (L.4.3) $Q_a = -W_a$ (Solamente efectivo en el caso de líneas sobre planos $Z_a = 0$)

-1) Babilónicas e Itálicas en un Plano

Su intersección con la superficie $S_a(X, Y, Z) = 0$, ahora el plano $Z_a = 0$ genera las ecuaciones de las Líneas Babilónicas e Itálicas sobre dicho plano, base del reloj.,

(L.3.1) $U_a x + V_a y + Q_a = 0$ con los Q_a y φ correspondiente a cada línea, es decir:

1.1) Horas Babilónicas (con Ang. Hor. φ_b)

Estilo Paral. Eje Terrestre con k_2 y $Q_a = \text{sen } \alpha_k$

(L.3.1.1). $(-m \text{sen } \varphi_b - n \cos \varphi_b + h \text{tg } \alpha_k) x + (a \text{sen } \varphi_b + b \cos \varphi_b + j \text{tg } \alpha_k) y + \text{tg } \alpha_k = 0$

Estilo Normal al Plano Base con k_a y $Q_a = -c \text{sen } \varphi_b \cos \alpha_k - d \cos \varphi_b \cos \alpha_k - f \text{sen } \alpha_k$

(L.3.1.2) $(-m \text{sen } \varphi_b - n \cos \varphi_b + h \text{tg } \alpha_k) x + (a \text{sen } \varphi_b + b \cos \varphi_b + j \text{tg } \alpha_k) y + d \text{sen } \varphi_b - c \cos \varphi_b + f \text{tg } \alpha_k = 0$

1.2) Horas Itálicas (con Ang Hor. φ_i)

Estilo Paralelo al. Eje Terrestre. con k_2 y $Q_a = \text{sen } \alpha_k$

(L.3.1.3). $(m \text{sen } \varphi_i + n \cos \varphi_i + h \text{tg } \alpha_k) x + (-a \text{sen } \varphi_i - b \cos \varphi_i + j \text{tg } \alpha_k) y + \text{tg } \alpha_k = 0$

Estilo Paralelo al Eje Terrestre. $\bar{k}_2$ (con Ang Hor. φ_0)

$$(L.3.1.4.). (-m \operatorname{sen} \varphi_0 + n \cos \varphi_0 + h \operatorname{tg} \alpha_k) x + (a \operatorname{sen} \varphi_0 - b \cos \varphi_0 + j \operatorname{tg} \alpha_k) y + \operatorname{tg} \alpha_k = 0$$

1.3) Envolvente de las Babilónicas e Itálicas en un plano

Se hallan eliminando la variable φ entre las ecuaciones de dichas líneas y su derivada

$$(B.3) \text{ ó } (L.2) \quad (x - P_{ox}) U_a + (y - P_{oy}) V_a - P_{oz} W_a = 0 \quad y$$

$$(L.2.1) \quad (x - P_{ox}) U_a' + (y - P_{oy}) V_a' - P_{oz} W_a' = 0$$

cuyo resultado es, en el Triedro (A)

$$(L.2.2) \quad (mx - ay - mP_{xa} + aP_{ya} - dP_{za})^2 + (nx - by - nP_{xa} + bP_{ya} + cP_{za})^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha_k (hx + jy - hP_{xa} - jP_{ya} + fP_{za})^2 = 0$$

similar a la (E.7.1), del Capítulo IV, cambiando δ por $(90^\circ - \alpha_k)$.

- Envolvente en el Triedro (A) con Estilo Perpendicular al Plano Base $\bar{k}_a$

$$(E.7.1.2) \text{ ó } (L.2.3) \quad (h^2 - \cos^2 \alpha_k) x^2 + (j^2 - \cos^2 \alpha_k) y^2 + 2hpxy + 2hfx + 2jfy + f^2 - \cos^2 \alpha_k = 0$$

Tipo de Cónica de la envolvente

$$(E.8) \text{ ó } (L.2.4) \quad \operatorname{sen}^2 \alpha_k \begin{cases} \leq f^2 & \text{Elipse} \\ = f^2 & \text{Parábola} \\ > f^2 & \text{Hipérbola} \end{cases}$$

- 2) Babilónicas e Itálicas en Cilindros Fig (L-4)

En este caso, la función $S_a = 0$ es la de un cilindro de las siguientes características:
La base se halla sobre el plano $Z_a = 0$; y su ecuación:

$$(L.4) \quad X_a = F_1(\omega) ; \quad Y_a = F_2(\omega) ; \quad Z_a = Z_p$$

siendo ω una función cualquiera. La Z_p que define el punto P intersección con el plano D, está dada por:

$$(L.3) \quad U_a X_p + V_a Y_p + W_a Z_p + Q_a = 0.$$

que con las (L.4) expresan las líneas Babilónicas ó Itálicas. con la Q_a y la φ correspondientes

$$(L.5) \quad Z_p = - \frac{F_1(\omega) U_a + F_2(\omega) V_a + Q_a}{W_a}$$

3) Babilónicas e Itálicas en Conos. Fig. (L-5)

La definición del Cono se expresa por la altura L del vértice V y la ecuación en paramétricas de su base sobre el plano $Z_a = 0$

$$(L.6) \quad \text{Datos del Cono} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Vértice } V(0, 0, L) \\ \text{Base } \left\{ \begin{array}{l} X_a = F_1(\omega) \\ Y_a = F_2(\omega) \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Ecuación de un punto $P(X_p, Y_p)$ sobre una generatriz

$$\frac{X_p}{-X_a} = \frac{Y_p}{-Y_a} = \frac{Z_p - L}{L} \quad \text{que en paramétricas resulta}$$

$$(L.7) \quad X_p = -F_1(\omega) \cdot \frac{Z_p - L}{L} \quad \therefore Y_p = -F_2(\omega) \cdot \frac{Z_p - L}{L}$$

Su intersección con los planos D toma la forma con la Q_a y φ correspondientes

$$(L.3.) \quad U_a X_p + V_a Y_p + W_a Z_p + Q_a = 0 \quad \text{con (L.7)}$$

$$(L.8) \quad Z_p = L \frac{F_1(\omega) U_a + F_2(\omega) V_a + Q_a}{F_1(\omega) U_a + F_2(\omega) V_a - W_a L}$$

Y como en el Capítulo anterior, para facilitar la construcción geométrica, sea Z_q la distancia desde P a la base del cono y por tanto:

$$(L.9) \quad Z_q = Z_p / \cos \mu = \frac{Z_p}{(1 + \tan^2 \mu)^{1/2}} = \frac{L Z_p}{F_1^2(\omega) + F_2^2(\omega) + L^2}^{1/2}$$

4) Líneas Sidéreas

Está definido el Día Sidéreo por el tiempo transcurrido por dos pasos consecutivos del meridiano del punto geográfico K , por el Punto Vernal. Como no es posible materializar esto, se puede tomar como referencia una estrella fija, ó bien teniendo en cuenta que el plano D_1 horizontal del punto K en un instante dado, vuelve a serlo después de un giro terrestre de 360° . Si este plano es paralelo al de la eclíptica, donde la posición del Sol es indiferente, y el punto K se halle sobre el paralelo terrestre $\alpha_K = (90^\circ - \varepsilon)$, el haz de planos D generan las Líneas Sidéreas. El proceso es similar al de las Babilónicas e Itálicas con el Angulo Horario φ_s calculado a continuación y que indica, con la condición impuesta de la latitud, la diferencia con estas últimas

4.1) Angulo Horario Sidéreo Fig. (L-3)

En el Triedro (0) , el plano $Z_0 = 0$ es la base de los Angulos Gnomónicos, pudiendo elegir el origen de cualquier haz horario según sus circunstancias, tal como es el caso de las líneas Babilónicas o Itálicas, partiendo de los ejes que definen los puntos del Orto y Ocaso. Ahora bien, por motivos astronómicos y facilidad, se elige para el Sidéreo como origen de la hora cero, el definido por la intersección del plano meridiano del punto K , que pasa por el punto Vernal y el $Z_0 = 0$; es decir, que se encuentra en el eje $X_0 H$, que además es el de las horas Equinociales. Así mismo, este plano da lugar, según la fórmula (L.1.6.1), a la línea Babilónica de las 18^h de dicho punto. Como consecuencia, las relaciones entre los distintos Angulos Horarios vienen expresadas por:

$$(L.1.1) \quad \varphi_i = \varphi - 90^\circ \quad (L.1.3) \quad \varphi_b = \varphi + 90^\circ \quad (A.4) \quad \varphi = 15 t_s + 90^\circ$$

$$(L.1.5) \quad \varphi_s = \varphi_i + 90^\circ \quad y \quad (L.1.6) \quad \varphi_s = \varphi_b + 270^\circ \quad (L.1.7) \quad \varphi_s = 15 t_s$$

de donde

$$(L.1.5.1) \quad t_s = t_i + 6^h \quad y \quad (L.1.6.1) \quad t_s = t_b + 18^h$$

Las líneas Horarias Sidéreas ,corresponden a las Babilónicas aumentadas en 18 horas y recíprocamente a las Itálicas en 6. En resumen son unas Babilónicas ó Itálicas referidas a un punto del Círculo Polar y con distinto Angulo Horario; por tanto, como norma, todo lo indicado anteriormente para las últimas nombradas, se puede aplicar en este caso,

4.2) Horas Sidéreas

Estilo Paralelo al Eje Terrestre $\bar{k}_2$ ($\varepsilon = 23^\circ 27'$)

$$(L.3.1) \quad U_a x_p + V_a y_p + Q_a = 0 \quad \text{con } \varphi_s = 15 t_s \quad y \quad Q_a = -\sin(90^\circ - \varepsilon) \quad \text{resulta:}$$

$$(L.3.1.4) \quad (n \cdot \sin \varphi_s - m \cdot \cos \varphi_s + h / \operatorname{tg} \varepsilon) x + (-b \cdot \sin \varphi_s + a \cdot \cos \varphi_s + j / \operatorname{tg} \varepsilon) y + 1 / \operatorname{tg} \varepsilon = 0$$

Como consecuencia, los "c.t.p" correspondientes a los senos y cosenos de los Angulos Horarios correspondientes a Babilónicas e Itálicas , tienen distinto signo; y el de las Sidéreas, igual que las del Rayo Solar, excepto los c, d, f.

5) Relación entre diversas Horas

5.1) Relación entre las Horas Equinocciales y las Babilónicas Triedro (A)

Por simplicidad, el estudio se realiza sobre el Plano Horizontal de un p. g. H. con Estilo Paralelo al Eje Terrestre k_2 . Por tanto, los "c.t.p" valen: $a = n = h = d = 0$; $b = -\sin \alpha_H$; $m = 1$; $c = -\cos \alpha_H$; $f = \sin \alpha_H$

$$(L.10) \quad \text{ó} \quad (E.10.2.1) \quad y_e = x_e \operatorname{tg} \varphi_e / \sin \alpha_H \quad \text{----- Línea Equinoccial (Cap. IV)}$$

$$(L.3.1.1). \quad (-\sin \varphi_b x_b + \sin \alpha_H (-\cos \varphi_b + 1) y_b + \operatorname{tg} \alpha_H = 0 \quad \text{----- Línea Babilónica}$$

La abscisa de su intersección x_0 debe ser igual a la del "Vector Horario " es decir: Está sobre la cónica de insolación diurna de declinación δ

$$(L.11.) \quad x_0 = \sin \varphi_e + \cos \varphi_e \operatorname{tg} \alpha_H / \sin(\varphi_e - \varphi_b) = -\sin \alpha_H \cos \varphi_e / (-\cos \alpha_H \sin \varphi_e + f \operatorname{tg} \delta)$$

Resolviendo la igualdad anterior y los valores de los ángulos φ_e y φ_b en función de sus tiempos respectivos, se llega a:

$$(L.12.1) \quad \cos 15(t_e - t_b) = \operatorname{tg} \alpha_H \operatorname{tg} \delta$$

-1º) La diferencia de los Ángulos Horarios ó tiempos es constante para cada Declinación Solar .

-2º) Estas líneas se cortan en la cónica de Insolación definida por la δ dada en (L.12.1) .

-3º) Si $\cos 15(t_e - t_b)_1 = \cos 15(t_e - t_b)_2$ se verifica que :

$$(L.13.1) \quad 15(t_e - t_b)_1 = -15(t_e - t_b)_2 \quad \text{ó} \quad (t_e - t_b)_1 + (t_e - t_b)_2 = 24^h$$

La suma de dos diferencias horarias estudiados, con Declinación Solar constante, es de 24 horas

Ejemplo

Babilónicas en Las Rozas ($\alpha_K = \alpha_H = 40,49^\circ$):

Intersección entre las Babilónicas y Equinocciales cuya diferencia horaria $t_b - t_e$ es de 5^h

$$(L.12.1) \quad \operatorname{tg} \delta = 1,1713 \cos 15 (t_e - t_b) = 1,1713 \cos 75^\circ ;$$

La intersección se halla en la cónica con Declinación Solar $\delta = 16,86^\circ$ y según la (L.13.1) también en la correspondiente a la diferencia horaria $(t_e - t_b) = 19^h$ Este ejemplo es válido para el caso siguiente.

5.2) Relación entre las Horas Equinocciales y las Itálicas Triedro (A)

Partiendo de la fórmula (L.12.1) $\cos 15 (t_e - t_b) = \operatorname{tg} \alpha_H \operatorname{tg} \delta$ y recordando la relación entre los Angulos Horarios de las líneas del epígrafe (L.1.3)) $\varphi_b = \varphi_i + 90^\circ$ se llega a a los mismos resultados de l caso anterior.

$$(L.12.2) \quad \cos 15 (t_e - t_i) = - \operatorname{tg} \alpha_H \operatorname{tg} \delta \quad \text{y} \quad (L.13.2) \quad (t_e - t_i)_1 + (t_e - t_i)_2 = 24^h$$

5.3) Relación entre las Horas Equinocciales y las Sidéreas (Triedro (A))

De modo similar al caso anterior, se tiene que $\alpha_K = (90^\circ - \varepsilon)$, (L.1.6) $\varphi_s = \varphi_b + 90^\circ$, y que la diferencia (L.14) $(t_e - t_s) = AR$, (Ascensión Recta). Se llega a:

$$(L.12.3) \quad \sin 15 (t_e - t_s) = \operatorname{tg} \delta / \operatorname{tg} \varepsilon \quad \text{ó} \quad \sin 15 AR = \operatorname{tg} \delta / \operatorname{tg} \varepsilon \quad \text{y}$$

$$(L.13.2) \quad 15 (t_e - t_s)_1 = 180^\circ - 15 (t_e - t_s)_2 \quad \text{ó} \quad AR_1 + AR_2 = 180^\circ / 15 = 12^h.$$

Ejemplo

Sidéreas en Las Rozas ($\alpha_K = \alpha_H = 40,49^\circ$) Intersección entre las Sidéreas y Equinocciales cuya diferencia horaria $(t_b - t_e)$ es de 5^h La intersección se produce en la cónica de insolación con

$$(L.12.3) \quad \operatorname{tg} \delta = \sin 75^\circ \operatorname{tg} \varepsilon = 0,420$$

La intersección se halla en la cónica con Declinación Solar $\delta = 22,79^\circ$ y según la (L.13.2) también en la correspondiente a la diferencia horaria $(t_e - t_b) = AR = 7^h$

- 6) Propiedades de las Líneas Babilónicas, Itálicas y Sidéreas

1º) Condición para que las Babilónicas e Itálicas sean simétricas con relación a la Subestilar

Las pendientes en el plano $Z_a = 0$ respectivamente de las Babilónicas e Itálicas son:

$$(L.14.1) \quad \operatorname{tg} \mu_b = \frac{\sin \varphi_b}{\sin \alpha (1 - \cos \varphi_b)}$$

$$(L.14.2) \quad \operatorname{tg} \mu_i = \frac{- \sin \varphi_i}{\sin \alpha (1 + \cos \varphi_i)}$$

que es la misma ecuación, pero con distinto origen. Para que estas líneas sean simétricas con relación a la subestilar, debe verificarse que $\operatorname{tg} \mu_b = - \operatorname{tg} \mu_i$ Y esto se consigue aumentando el ángulo φ_i en 180° (ó t_i en 12^h), con objeto que las Itálicas a partir de la hora 12 se encuentren en la parte visible del plano $(A)_H$

$$\frac{\sin \varphi_b}{\sin \alpha (1 - \cos \varphi_b)} = \frac{\sin \varphi_i}{\sin \alpha (1 + \cos \varphi_i)} = \frac{\sin (\varphi_i + 180^\circ)}{\sin \alpha (1 + \cos (\varphi_i + 180^\circ))} = \frac{-\sin \varphi_i}{\sin \alpha (1 - \cos \varphi_i)}$$

ecuación que se cumple para

$$(L.15.1) \quad \varphi_b + \varphi_i = 360^\circ \quad \text{ó} \quad (L.15.2) \quad (t_b + t_i) = 24^h$$

La suma de las horas Babilónicas e Itálicas de líneas simétricas respecto a la subestilar, es de 24 horas. Dado que $\varphi_b = \varphi_i + 180^\circ$ las itálicas a partir de las 12, coinciden con las babilónicas de las mismas horas

De modo similar, si se trata de las Sidéreas, $\text{tg } \mu_{s1} = -\text{tg } \mu_{s2}$ es decir

$$\frac{-\cos \varphi_{s1}}{\cos \alpha \sin \varphi_{s1} + \sin \alpha \text{tg } (90^\circ - \varepsilon)} = \frac{-\cos \varphi_{s2}}{\cos \alpha \sin \varphi_{s2} + \sin \alpha \text{tg } (90^\circ - \varepsilon)}$$

Se verifica si

$$(L.15.3) \quad \varphi_{s1} + \varphi_{s2} = 180^\circ \text{ ó } 440^\circ \quad \text{y} \quad (L.15.4) \quad (t_{s1} + t_{s2}) = 12^h \text{ ó } (t_{s1} + t_{s2}) = 36$$

-2º) Si $\cos 15 (t_b - t_i) = -\cos 15 (t_b - t_i) = \text{tg } \alpha \text{tg } \delta$ según (L.12.1) y (L.12.2) se verifica;

$$(L.16) \quad 2t_e = t_b + t_i$$

-3º) Si $\delta = 0$, $\cos 15 (t_b - t_i) = 1$ y $\cos 15 (t_b - t_i) = -1$; por tanto: $15 (t_b - t_i) = 90^\circ$ etc.

$$(L.17.1) \quad t_b - t_i = 6^h \quad \text{y} \quad t_b - t_i = -6^h$$

Sidéreas: $\sin 15 (t_e - t_s) = \text{tg } \delta / \text{tg } \varepsilon = 0$ según (L.12.3), por tanto: (L.18.1) $t_e = t_s$
ó (L.18.2) $t_e = t_s + 12^h$

-7) Líneas Babilónicas, Itálicas y Sidéreas en Bifilares

En el Capítulo VI se demostró que la ecuación vectorial del reloj Bifilar es en el Triedro (B)

$$(G.4) \quad (\overline{P-H})_b = \overline{b}_b \cdot M_0 \frac{A_b \sin \varphi + B_b \cos \varphi + H_b \text{tg } \delta}{c \cdot \sin \varphi + d \cdot \cos \varphi + f \cdot \text{tg } \delta} + \overline{b}_b \cdot N_0 \frac{M_b \sin \varphi + N_b \cos \varphi + J_b \text{tg } \delta}{c \cdot \sin \varphi + d \cdot \cos \varphi + f \cdot \text{tg } \delta}$$

es decir que los "Coeficientes del Vector Horario" A_b , B_b y H_b están multiplicados por el factor M_0 y los M_b , N_b y J_b por el N_0 . (respectivamente en el Triedro (A) por los "c.t.p." m , $-n$, h y $-b$, a , j) y que era equivalente al "Vector Horario" equinoccial con Estilo Normal al Plano Base multiplicando sus componentes por los escalares que definen la altura de cada hilo..

Aplicando las fórmulas (L.3.1) de las Líneas Babilónicas, Itálicas y Sidéreas con el Estilo antes citado, es decir con $Q_a = -W$ y el ángulo φ correspondiente, se llega a la siguiente conclusión:

Los coeficientes de la variable X , vienen multiplicados por N_0 , los de la Y , por M_0 y el independiente por el producto $M_0 N_0$ (Véase Capítulo VI- Reloj Bifilar) y se llega a la

$$(L.3.2) \quad N_0 U_a x_p + M_0 V_a y_p + N_0 M_0 Q_a = 0$$

Ejemplo: Horas Sidéreas $\varphi = \varphi_s$; $\alpha_k = 90^\circ - \varepsilon$ $Q_a = c \sin \varphi \sin \varepsilon + d \cos \varphi \sin \varepsilon + f \cos \varepsilon$

La fórmula (L.3.1.4), en Bifilares se convierte en la (L.3.2.1)

[illegible]

SOL
*

Fig. (L-2)

The diagram shows a celestial sphere with a vertical axis labeled P_N at the top and P_S at the bottom. A horizontal line represents the Equator, labeled "Ecuador". Above the Equator is the Tropic of Cancer, labeled "T. Cancer", and below is the Tropic of Capricorn, labeled "T. Capric.". A diagonal line represents the horizon, labeled "Horizonte". Several dashed lines, labeled "Líneas Babilónicas", originate from the North Pole and curve towards the horizon. One specific dashed line is labeled $90 - \alpha_K$. A solid line is labeled α_H . Three points on the horizon are labeled 1^H , 2^H , and 3^H . A dashed line connects α_H to the horizon, passing through 1^H .

Líneas Babilónicas

Piano Ecuatorial

0^H Babil.

Ital.

Origen Angulos Horarios

Fig. (L-4)

The diagram shows a 3D coordinate system with axes X_1 , Y_1 , and Z_1 . A curved surface is defined in the first octant. A point H is located on the X_1 axis. A line segment connects H to a point P on the surface. Another line segment connects H to a point $R_1(X_1, Y_1)$ on the surface. The angle between these two segments is labeled Ω . Dashed lines indicate the projection of the surface onto the Y_1Z_1 plane and the projection of point P onto the Z_1 axis.

Fig. (L-5)

CAPITULO XI

M) TEORIA DE LOS PLANOS PARALELOS

Sean dos p. geográficos H y K, con diferencia de longitudes φ_{hk} . En cada uno se sitúa un Plano, el $(A)_H$ y el $(A)_K$, definidos mediante sus versores correspondiente. $(\overline{A-H})_{ah} = \overline{k}_{ah}$ y $(\overline{A-K})_{ak} = \overline{k}_{ak}$

Si estos planos son paralelos, sus versores son coincidentes en cualquier Triedro; en el Triedro (2), (cuyo plano $Z_2 = 0$ es el Ecuatorial), tienen como ecuación, según (B.4.2). Fig (M-1)

$$(M.1) \quad \overline{k}_{ah} = \overline{k}_{ak} = \overline{i}_{2h}d_h - \overline{j}_{2h}c_h + \overline{k}_{2h}f_h = \overline{i}_{2k}d_k - \overline{j}_{2k}c_k + \overline{k}_{2k}f_k$$

Cambiando de ejes, pasando del Triedro (2_h) al (2_k) según las fórmulas

$$(M.2) \quad \overline{i}_{2k} = \overline{i}_{2h} \cos \varphi_{hk} - \overline{j}_{2h} \sin \varphi_{hk} \quad \therefore \quad \overline{j}_{2k} = \overline{i}_{2h} \sin \varphi_{hk} + \overline{j}_{2h} \cos \varphi_{hk} \quad \text{se llega a:}$$

$$(M.3) \quad \begin{aligned} c_k &= -d_h \sin \varphi_{hk} + c_h \cos \varphi_{hk} \\ d_k &= d_h \cos \varphi_{hk} + c_h \sin \varphi_{hk} \\ f_k &= f_h \end{aligned} \quad \text{De lo que se deduce:}$$

- 1º) Para que los Planos $(A)_H$ y $(A)_K$, sean paralelos, es condición necesaria y suficiente que la relación entre sus "c.t.p" c, d y f y la diferencia de longitudes, φ_{hk} sea la indicada en (M.3)

- 2º) Los "c.t.p" f son iguales en planos paralelos

- 3º) Planos paralelos en un mismo meridiano, tienen los "c.t.p" c, d y f iguales

Cumplíendose las condiciones anteriores, se calculan a continuación, dos de la parejas de parámetros i_k γ_k ó α_k λ_k que definen al plano $(A)_K$ en función de una de las citadas y los "c.t.p" del plano $(A)_H$

A) Conociendo α_k y λ_k hallar i_k y γ_k

A₁) Cálculo de i_k

Partiendo de los valores

$$(B.2) \quad \begin{aligned} c &= -\sin \alpha \cos i \sin \gamma - \cos \alpha \sin i \\ d &= \cos i \cos \gamma \\ f &= -\cos \alpha \cos i \sin \gamma + \sin \alpha \sin i \end{aligned}$$

Multiplicando f_k por $\sin \alpha_k$ y c_k por $\cos \alpha_k$, su diferencia, viene indicada por

$$(M.4) \quad \sin i_k = f_k \sin \alpha_k - c_k \cos \alpha_k$$

A₂) Cálculo de γ_k

Multiplicando c_k por $\text{sen}\alpha_k$ y f_k por $\text{cos}\alpha_k$ y sumándolos, se llega a:

$$(M.5) \quad \text{tg } \gamma_k = (c_k \text{sen}\alpha_k + f_k \text{cos}\alpha_k) / d_k$$

B) Conociendo i_k y γ_k hallar α_k y λ_k

B₁) Cálculo de α_k

Del cociente f_k / c_k despejando la incógnita α_k , se tiene:

$$(M.6) \quad \text{tg } \alpha_k = (c_k \text{sen } \gamma_k - f_k \text{tg } i) / (c_k \text{tg } i + f_k \text{sen } \gamma_k)$$

Si el plano $(A)_k$ es horizontal, $f_k = \text{sen } \alpha_k$; $c_k = -\text{cos } \alpha_k$; $d_k = 0$ ya que:

$$i_k = \gamma_k = 90^\circ \text{ y por tanto } \text{tg } \alpha_k = -f_k / c_k = f_h / \text{cos } \alpha_k \text{ ó (M.6.1) } \text{sen } \alpha_k = f_h$$

B₂) Cálculo de λ_k

Se desarrolla la fórmula (M.3) $d_k = d_h \text{cos}\varphi_{hk} + c_h \text{sen } \varphi_{hk}$ en función de $\text{tg } \varphi_{hk}$

$$(M.7) \quad \text{tg } \varphi_{hk} = \text{tg } (\lambda_h - \lambda_k) = (-d_h c_h + d_k \sqrt{c_h^2 + d_h^2 - d_k^2}) / (c_h^2 - d_k^2)$$

Si el plano $(A)_k$ es horizontal se llega a

$$(M.7.1) \quad \text{tg } \varphi_{hk} = \text{tg } (\lambda_h - \lambda_k) = -d_h / c_h$$

El mismo resultado se consigue con la (M.3) con el valor de $d_k = 0$

C) Cálculo de relojes en planos paralelos

Mediante lo indicado anteriormente y partiendo de la ecuación del "V.H", con Estilo Par. al Eje Terr. se estudian dos soluciones para resolver el reloj del plano $(A)_k$ en el plano $(A)_h$ con sus ejes y con el "Ang. Horario." φ_k ;

-1º) En función de los "c.t.p" del plano $(A)_h$ y el ángulo φ_{hk} (diferencia de sus longitudes)

-2º) En función de los "c.t.p" del plano $(A)_k$ y el ángulo φ_{hk} (diferencia angular entre la máxima pendiente $Y_a H$, variable en cada p.g. y la subestilar, Y_b fija en el espacio) Fig (M-2)

En ambos casos, si el "c.t.p" f es > 0 el Estilo Paral. al Eje Terr. es el versor $\vec{k}_2$ y el $-\vec{k}_2$ si $f < 0$. Además, si el coeficiente angular de la recta equinoccial $\text{tg } \phi = -h / j < 0$, el plano está orientado al Este ($\gamma > 90^\circ$) y los "c.t.p" h y j tienen el mismo signo; y si $\text{tg } \phi = -h / j > 0$, la orientación es hacia el Oeste ($\gamma < 90^\circ$), y los "c.t.p" h y j tienen distinto signo. Similar el caso de cualquier Estilo.

(La recta Equinoccial es la (E.7.2.3) $hx + jy + 1 = 0$)

C₁) Con los "c.t.p" del plano $(A)_h$ y el ángulo φ_{hk}

Desarrollando el Ang. Horar. $\varphi_h = \varphi_k + \varphi_{hk}$ los "c.t.p" toman el valor:

$$(M.8) \quad \begin{array}{ll} a_1 = a_h \text{cos } \varphi_{hk} - b_h \text{sen } \varphi_{hk} & h_1 = h_h \quad ; \quad j_1 = j_h \\ b_1 = b_h \text{cos } \varphi_{hk} + a_h \text{sen } \varphi_{hk} & c_1 = c_h \text{cos } \varphi_{hk} - d_h \text{sen } \varphi_{hk} \\ m_1 = m_h \text{cos } \varphi_{hk} - n_h \text{sen } \varphi_{hk} & d_1 = d_h \text{cos } \varphi_{hk} + c_h \text{sen } \varphi_{hk} \\ n_1 = n_h \text{cos } \varphi_{hk} + m_h \text{sen } \varphi_{hk} & f_1 = f_h \end{array}$$

Estos "c.t.p" corresponden, al mismo "V.H" en el plano $(A)_M$ situado en el p.g. M_H del Meridiano del K y paralelo al $(A)_H$ por cumplir sus "c.t.p" c_1, d_1, f_1 con la condición de paralelismo. Además, el ángulo φ_{ah} entre el eje del plano $Y_a M$ (su máxima pendiente y variable en cada p. g.), y el eje del "Vector Horario" $Y_b M$ (es decir, la subestilar, fija en el espacio), es en este caso constante, según (D.2.1) $\text{tg } \varphi_{ah} = h_1 / j_1 = h_h / j_h = C^{te}$. Se deduce que en el p.g. M_H , el "V. H" tiene sus ejes paralelos a los del p.g. H.

Si el plano $(A)_L$ es el horizontal, su polo, el p.g. A, queda definido por su longitud (M.7.1) $\text{tg } \varphi_{hk} = -d_h / c_h$ y por su latitud, (M.6.1), $\text{sen } \alpha = f_h$ que cumplen con las condiciones de paralelismo

C₂) Con los "c.t.p" del plano $(A)_K$ y el ángulo $\phi_{hk} = \varphi_{ah} - \varphi_{ak}$

El "V.H" del plano $(A)_K$ es igual a sí mismo en cualquier plano paralelo $(A)_H$ del p.g. H, es decir, $(P-K)_K = (P-H)_H$ pero los ejes de ambos planos, como se indicó anteriormente, variables en cada p.g., no son coincidentes, y sustienden el ángulo ϕ_{hk} . Por tanto, el desarrollo del "V.H" del $(A)_K$ en el $(A)_H$ se realiza mediante el correspondiente giro de los ejes principales,

$$(M.9) \quad \text{tg } \phi_{hk} = \text{tg } (\varphi_{ah} - \varphi_{ak}) = - (h_h j_k - h_k j_h) / (h_h h_k + j_h j_k)$$

Al cambiar de ejes el plano $(A)_K$ según (M.2), (permutando en este caso los subíndices "h" y "k"), los nuevos "c.t.p" toman el valor siguiente:

$$(M.10) \quad \begin{aligned} a_2 &= a_k \cos \phi_{hk} + m_k \text{sen } \phi_{hk} & j_2 &= j_k \cos \phi_{hk} - h_k \text{sen } \phi_{hk} \\ b_2 &= b_k \cos \phi_{hk} + n_k \text{sen } \phi_{hk} & c_2 &= c_k \\ m_2 &= m_k \cos \phi_{hk} - a_k \text{sen } \phi_{hk} & d_2 &= d_k \\ n_2 &= n_k \cos \phi_{hk} - b_k \text{sen } \phi_{hk} & f_2 &= f_k \\ h_2 &= h_k \cos \phi_{hk} + j_k \text{sen } \phi_{hk} \end{aligned}$$

Estos "c.t.p" como en el caso anterior, corresponden también al mismo "V.H" en el plano $(A)_M$ situado en el p.g. M_H del Meridiano de K y paralelo al $(A)_H$ por cumplir los "c.t.p" c_2, d_2, f_2 con la condición de paralelismo.

Círculos "C"

Proyectando el versor i_{ah} sobre el plano paralelo al ecuatorial $(A)_E$ subtiende el ángulo ϕ_h y los planos tangentes a la Esfera Terrestre y paralelos al versor i_{ah} , del plano $(A)_H$ se encuentran situados sobre el círculo máximo normal a dicho versor, nombrado " C_H " y cortan al ecuatorial según el ángulo ϕ_h siendo por consiguiente, el l.g. de los puntos geográficos L tales, entre ellos los M_H y A, que su reloj se mantiene igual a sí mismo y sus ejes X_L, Y_L, K son paralelos a los correspondientes del H, es decir el ángulo entre la línea de máxima pendiente y la subestilar es C^{te} . Fig (M -3) y Fig.(M 4) De modo similar, se calcula el " C_k " pasando por los p.g. K, M_K . Se deduce de lo anterior

-1.1) Un reloj situado en un plano $(A)_K$ se mantiene igual a sí mismo y sus ejes giran el ángulo $\varphi_{ah} = C^{te}$ en cualquier punto L del círculo " C_H "

-1.2) Las coordenadas del " C_H " está dada por: Longitud $\lambda = \varphi_{hL}$ (variable para cada p.g. L)

La latitud queda expresada por:

$$(M.8.1) \quad \text{tg } \alpha_L = n_L / h_L = (n_h \cos \varphi_{hk} + m_h \text{sen } \varphi_{hk}) / h_h$$

-1.3) Los "c.t.p" calculados en los apartados anteriores cumplen con las condiciones $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$; $m_1 = m_2$ etc; y relacionan entre sí, los "c.t.p" de los planos $(A)_H$ y $(A)_K$ y los ángulos φ_{hk} y ϕ_{hk}

-1.4.) En caso de Estilo Normal al Plano Base, se seguiría el mismo procedimiento, teniendo en cuenta los nuevos "c.t.p" (Capítulo IV). Por ejemplo

$$a_1 = n_h \cos \phi_{hk} + m_h \sin \phi_{hk} ; ; a_2 = n_k \cos \phi_{hk} - b_k \sin \phi_{hk} \text{ etc.}$$

En resumen, el "V.H". (llamémosle la "Aguja del reloj"), situado en un plano $(A)_H$ se mantiene siempre igual a si mismo ;en cualquier plano paralelo, y al desplazarse a través de su meridiano al p.g. K, los elementos gnomónicos subestilar, Estilo, líneas de insolación, "Haz Horario" etc, (o sea la " Esfera del reloj") se encuentran girados el ángulo ϕ_{hk} con relación a los ejes principales del plano $(A)_H$. La realidad es que quienes giran son los ejes del plano del p.g. K y no el "V.H" .

Si el K se desplaza a otro meridiano, todos los dichos elementos giran el nuevo ϕ_{hk} y la "Esfera" sigue indicando la hora de K, (ó cambiándola, si es la del nuevo meridiano, u otra cualquiera); pero esta "Esfera," si la variación de la longitud del p.g. K es múltiplo de 15° , se mantiene igual a la anterior (ó posterior), pero cambiando la hora en una ó mas unidades. Si los ejes del "V: H" de los L_H son paralelos a los del H, su lugar geométrico es el círculo " C_H " que pasa, además del p.g. H por los M_k y A. Fig. (M -4)

Consecuencia de todo lo indicado, la insolación del $(A)_K$ es función de sus coordenadas geográficas, tal como se estudió en el Capítulo VIII. (Iluminación en dicho plano y en el horizontal)

Discusión

- 1º) Si $\phi_{hk} = 0$ Los p.g. H y M_H coinciden y el K está en el meridiano de H Fig (M -5)
 - 2º) Si $\phi_{hk} = 0$ Los p.g. K y M_H y los círculos " C " coinciden Fig(M -6)
 - 3º) Si $\phi_{hk} = \phi_{hk} = 0$ Los p.g. H,K y M_H son coincidentes así como los círculo " C ". Fig. (M -7).
- Y si A se encuentra en el mismo meridiano, su plano es horizontal y ambos círculos coinciden con dicho meridiano.
- 4º) Si el p.g. A se encuentra en el meridiano de K, coincide con M_H y su plano es horizontal. Fig.(M -8)
 - 5º) Si el p.g. A está situado en el meridiano de H, M_H se sitúa en el Polo Geográfico y el círculo " C_H " es el citado meridiano. Fig.(M -9). Los planos de los p.g. L, son normales a dicho meridiano, ($\gamma_L = 90^\circ$; $i_L = i_j$). teniendo iguales los "c.t.p", función de $i_L + \alpha_L = C^{\text{te}}$ por cumplir las condiciones de paralelismo dadas en (M. 3)
 - 6º) En planos paralelos, un plano situado en un p.g. K, (del círculo " C_K ") al pasarla un p.g.H,(del círculo " C_H ") giran sus ejes el ángulo ϕ_{hk} Fig (M - 4)

Ejemplo

Angulo ϕ_{hk} que debe girar el plano vertical no declinante (inclinación $i = 0^\circ$ y codeclinación $\gamma = 90^\circ$) en Stokholm ($59,26^\circ$; $18,30^\circ$) para situarlo en Madrid ($40,43^\circ$; $-3,7^\circ$)

Los "c.t.p" de Stokholm

$$\begin{aligned} c_h &= c_s = -0,8593 \\ d_h &= d_s = 0 \\ f_h &= f_s = -0,5113 \end{aligned}$$

Los "c.t.p" de Madrid

$$\begin{aligned} c_k &= c_m = -0,7968 ; h_k = h_m = -0,2549 \\ d_k &= d_m = 0,3219 ; j_k = j_m = 0,8207 \\ f_k &= f_m = -0,5113 \end{aligned}$$

La diferencia de longitudes viene dada por $\phi_{hk} = \phi_{sm} = 18,3^\circ + 3,7^\circ = 22^\circ$

El plano en Madrid, según (M.4) y (M.5) tiene la inclinación $i_m = 15,96^\circ$ y codeclinación $\gamma_m = 70,44^\circ$, Orientación Oeste. Definido este plano, los ejes del de Stokholm, giran el ángulo $\phi_{hk} = 17,25^\circ$ siendo el Círculo " C_s " el meridiano de Stokholm y el " C_m " el que pasa por Madrid y el polo A. (de latitud $\alpha_A = -30,74^\circ$ y longitud $\lambda_A = 18,30^\circ$).

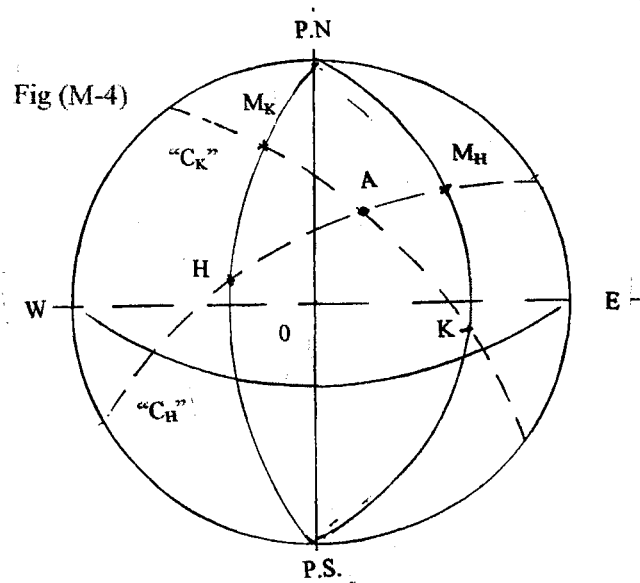
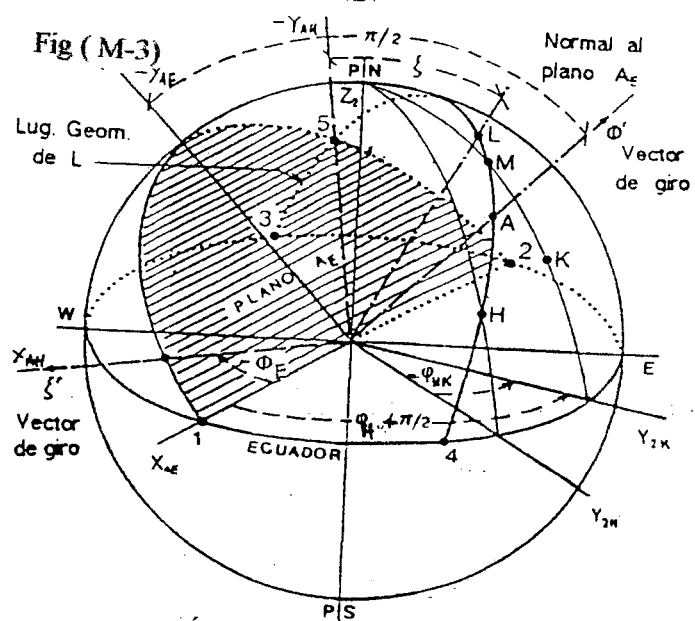
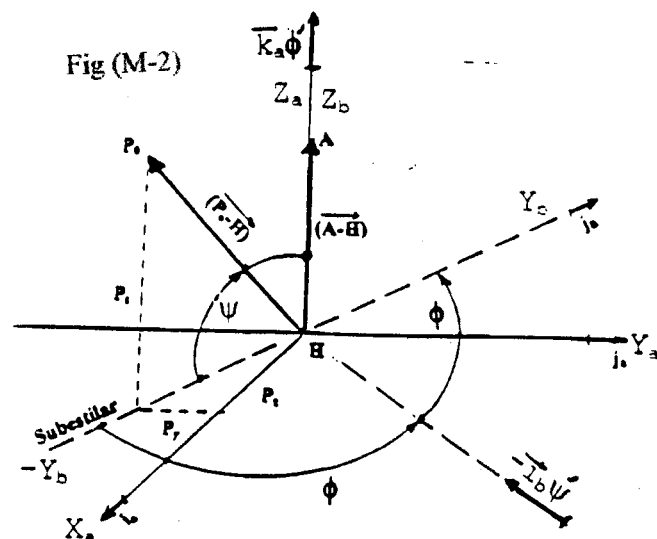
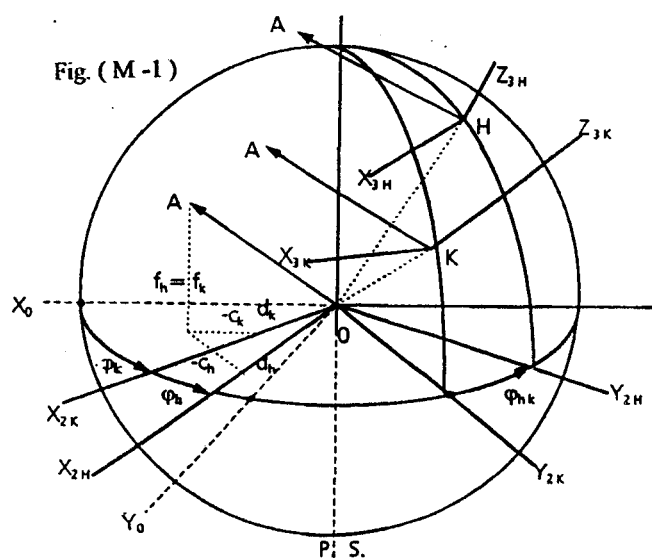


Fig (M-5)

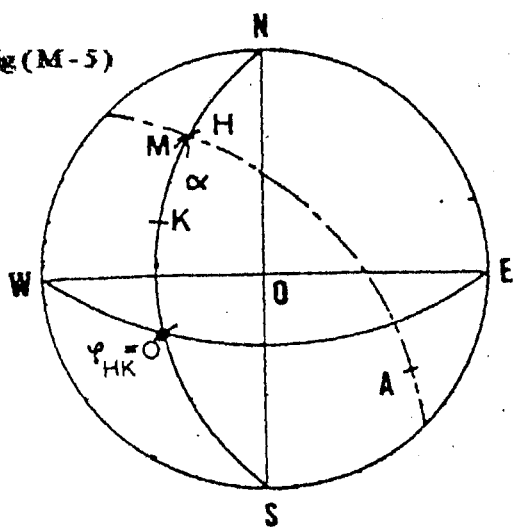


Fig (M-6)

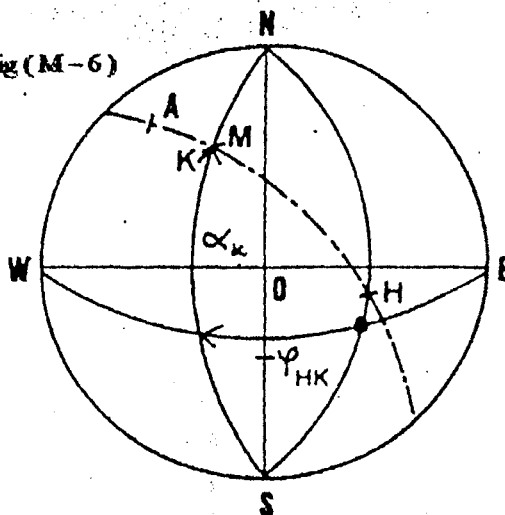


Fig (M-7)

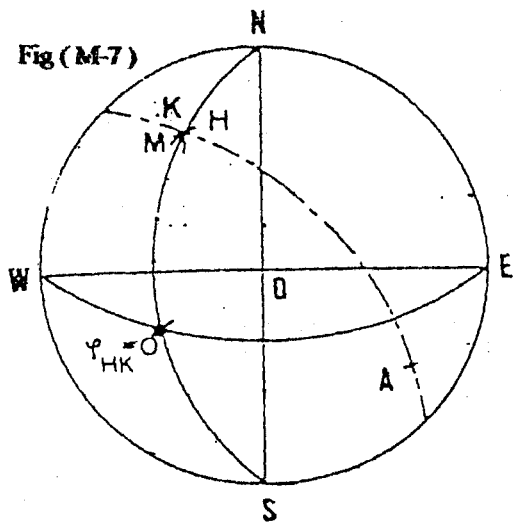


Fig (M-8)

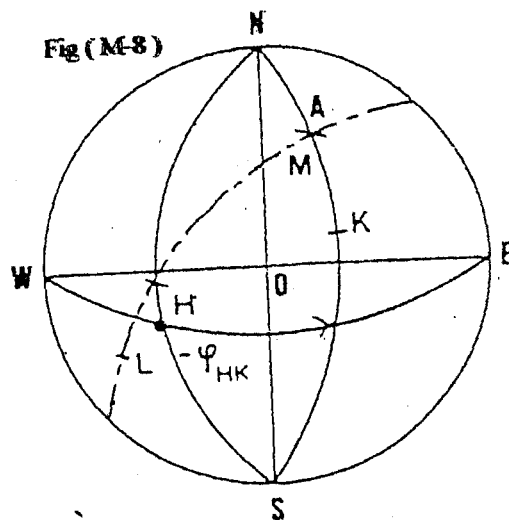


Fig (M-9)

